| *Example* | *1968* | *1969* |
|---|---|---|
| Market Price | R 2.24 | R 3.00 |
| Earnings per Share | 20c | 25c |
| Price-earnings Ratio | 11.2X | 12.0X |

## Dividend Yield

Dividend yield is calculated by dividing dividends per ordinary share for an accounting period by the average market price for the same period with the result expressed as a percentage. It measures the portion of earnings per share distribution to shareholders in relation to the market price of the particular share. No general rule can be laid down as to a reasonable dividend yield. In growth companies, investors usually derive all or almost all of the return they require on their investment in the form of capital gains with a dividend yield of only 1%, 2%, 3% or even nothing.

On the other hand, investors in below average companies will generally obtain all or almost all of their required return on their investment from cash dividends with little or nothing from capital gains. Dividend yields of 7%, 8%, 9% or even more would be reasonable for these companies. Investors in average companies normally get their required returns from a combination of capital gains and cash dividends with dividend yields approximating 4%, 5% or 6%.

| *Example* | *1968* | *1969* |
|---|---|---|
| Market Price | R 2.00 | R 2.50 |
| Dividends per Share | 13c | 15c |
| Dividend Yield | 6.5% | 6.0% |

.....................................................................

It cannot be emphasized too strongly that ratio analysis is not a mechanical process. There are often no hard and fast rules and no right and wrong answers. A current ratio of 2.1 to 1 is not necessarily satisfactory and 1.9 to 1 is not necessarily unsatisfactory. All ratios must be considered in the context of the particular company and the nature of its operations. An important function of ratio analysis is in pointing up things that may not seem just right, in suggesting areas for further examination, study and analysis. Ratio analysis is as much an art as it is a science and after analyzing enough companies, one will develop what might be described as almost a feel for interpreting the ratios.

# LINEÊRE PROGRAMMERING

DEUR A. P. L. KOTZE

Operasionele Navorsing,
S. A. Yster en Staal Industriële
Korporasie Beperk.

## SYNOPSIS

**In this article the general linear programming problem is outlined. Steps in the formulation of the linear programming problem are discussed as well as the limiting assumptions of the linear programming approach. This is followed by a short discussion of the interpretation of the solution to the linear programming problem.**

# Inleiding

EEN van die Operasionele Navorsingstegnieke wat dikwels toegepas word is Lineêre Programmering. Lineêre programmering in sigself is 'n wiskundige tegniek wat as sodanig gebruik word by die oplos van bepaalde probleme. Bestuur is dan ook gewoonlik nie geïnteresseerd in die meganika van die tegniek nie. Wat wel vir bestuur van belang is, in breë trekke, is wat lineêre programmering is, die soort van probleme wat geredelik met lineêre programmering aangepak kan word en wat uit die toepassing van lineêre programmering verkry kan word.

Waar 'n bestuurder dan ook die resultaat van 'n lineêre programmeringsstudie kry is dit vir hom van belang om bekend te wees met die beperkings waaronder die tegniek opereer. Hieronder sluit ons in aspekte van die formulering en interpretasie van die probleem en oplossing.

Hierdie artikel is inleidend van aard en daar word slegs beoog om die algemene agtergrond van lineêre programmering, met enkele punte van belang wat betref die formulering van die probleem en interpretasie van die oplossing, te gee. Geen aandag sal gegee word aan die algoritmes van lineêre programmering, wat met reg by die spesialis tuishoort nie. In die verband sal volstaan word met 'n paar opmerkings oor die rekenaaraspekte van lineêre programmering.

## DIE ALGEMENE PROGRAMMERINGSPROBLEEM

'n Probleem wat daagliks voorkom is die volgende: Verskillende produksiefaktore soos arbeid, kapitaal en grondstowwe is in beperkte hoeveelhede beskikbaar en kan aangewend word om 'n aantal take te verrig. In die algemeen kan die produksiefaktore op verskillende maniere aan die take toegeken word en sal elke toekenning 'n ander resultaat of totale opbrengs in die stelsel tot gevolg hê. Die basiese probleem is om die toekenning te maak wat 'n optimum resultaat tot gevolg sal hê bv. maksimum wins.

Voorbeelde van probleme van die aard is legio en ons gee hier net 'n paar tipiese probleme waarmee ons hoop om die algemene klimaat van dié tipe probleem oor te dra:

(a) Transportasie probleem. Hier het ons die situasie van 'n firma wat 'n aantal fabrieke beheer wat produseer vir lewering aan 'n aantal afsetgebiede en voorraaddepots. Die afleweringskoste vanaf die verskillende fabrieke aan die afsetgebiede kan verskil. Die probleem ontstaan dus om 'n distribusiepatroon te bepaal wat die totale distribusiekoste 'n minimum sal maak. 'n Verwante probleem wat hiermee saamhang is die plasing en kapasiteitsbepaling van die fabrieke en voorraaddepots.

(b) Meng probleme. In sy eenvoudigste vorm het ons hier die probleem van die huisvrou wat met 'n beperkte begroting wil verseker dat haar gesin 'n gebalanseerde diëet volg. By die aankoop van haar voedselware moet die huisvrou dan in ag neem wat elke item kos en wat die voedingswaarde en volume van elke item is. Dit moet sy dan versoen met die vereistes wat gestel word aan 'n gebalanseerde dieet en die hoeveelheid geld wat sy tot haar beskikking het. Dieselfde probleem, op 'n ander skaal, word ondervind deur die firma wat byvoorbeeld gebalanseerde veevoer, wat moet voldoen aan minimum vereistes, vervaardig.

(c) Produkmengsel. Waar 'n firma op 'n hoë vlak produseer en sy produksie wil opskuif is dit die reël dat knelpunte al hoe meer geaksentueer word. So byvoorbeeld kan die arbeidsmag, beskikbaarheid van grondstowwe, beskikbaarheid van masjientyd, almal knelpunte wees wat slegs teen groot koste, of glad nie, op die korttermyn uit die weg geruim kan word. 'n Situasie kan dus ontstaan waar die produksie van 'n artikel met 'n relatief lae winsgrens, grondstowwe en masjientyd gebruik wat met groter voordeel deur ander meer winsgewende artikels benut kan word. Om slegs die artikel met die hoogste wins per item te produseer sal aan die anderkant slegs in uitsonderlike gevalle die totale wins 'n maksimum maak. Die probleem is natuurlik dat die betrokke artikel sommige van die firma se produksiefasiliteite onekonomies sal benut. Geen enkele artikel sal as 'n reël al die produksiefasiliteite ewe ekonomies kan benut nie en die oplossing sal daarin lê om 'n produkmengsel saam te stel wat al die fasiliteite, in die geheel gesien, op die mees ekonomiese wyse benut.

Ons let op dat die probleme almal basies dieselfde is en in die voorgaande voorbeelde kan ons nou soek na gemeenskaplike faktore:

In elkeen van die probleme moet 'n vraag beantwoord word wat betrekking het op 'n hoeveelheid — watter hoeveelheid van 'n bepaalde fabriek se produksie moet na 'n bepaalde afsetgebied gaan, wat is die hoeveelheid wat 'n bepaalde fabriek moet kan produseer, watter hoeveelheid van 'n bepaalde voedselsoort moet gekoop word, watter hoeveelheid van 'n bepaalde produk moet geproduseer word? Telkens word die hoeveelheid ook geassosieer met 'n spesifieke fabriek, voedselsoort of produk. Ons herken dus hier die veranderlikes in die probleem.

In elkeen van die probleme sal die keuse van 'n hoeveelheid vir 'n bepaalde veranderlike 'n meetbare effek hê op die totale wins of koste. Dit is dus nodig om 'n kriterium te hê waarvolgens die verskillende moontlikhede teen mekaar opgeweeg kan word.

In elkeen van die probleme moet verder rekening gehou word met die effek wat 'n bepaalde hoeveelheid van 'n veranderlike op die beskikbare bronne het en tot watter mate voldoen word aan die vereistes wat in die probleemsituasie gestel word.

Die oplossing van die probleem sal daarin bestaan dat aangedui word wat die hoeveelheid (of vlak) van elkeen van die veranderlikes in die probleem moet wees sodat die kriterium wat gebruik word 'n optimum sal wees (bv. maksimum wins of minimum koste) terwyl die beperkings in die probleem gestel, bevredig word.

Opsommenderwys, die probleem is 'n programmeringsprobleem indien die volgende geld: (i) Die probleemsituasie kan beskryf word in terme van veranderlikes waarvoor die beste vlak gevind moet word. (ii) Die voorgestelde oplossing moet aan 'n aantal gekwantifiseerde vereistes of beperkings voldoen. (iii) 'n Kwantitatiewe kriterium is beskikbaar aan die hand waarvan alternatiewe oplossings teen mekaar opgeweeg en op die mees geskikte een besluit kan word.

## FORMULERING EN AANNAMES VAN DIE LINEêRE PROGRAMMERINGSPROBLEEM

Ons wil nie beweer dat ons op hierdie stadium alle programmeringsprobleme, soos die wat ons in die vorige paragraaf beskryf het, kan oplos nie. 'n Belangrike klas van die probleme kan egter met die tegniek bekend as lineêre programmering opgelos, of benaderd opgelos, word.

Alvorens ons die aannames vir die formulering van 'n probleem as 'n lineêre programmeringsprobleem, en die stappe in die formulering, bespreek formuleer ons die volgende voorbeeld as verwysing.

Veronderstel ons het 'n firma wat 3 produkte vervaardig. Die wins verbonde aan die bemarking van die produkte is goed bekend nl. R5, R4 en R7 respektiewelik. Die firma wil graag 'n maksimum wins maak en die probleem is om te besluit in watter hoeveelhede die onderskeie produkte vervaardig moet word. Die oplossing van die probleem is nie voor die handliggend nie aangesien die produksie beperk word deur eerstens die beskikbare masjientyd in 'n produksie periode nl. 500 uur in totaal (die produkte word op dieselfde masjiene vervaardig) en die beskikbare vloerruimte vir die voltooide produkte nl. 100 vierkante meter in totaal. Verder benut die 3 produkte die masjientyd vir voltooiing en vloerruimte vir berging soos volg:

| | | |
|---|---|---|
| 1ste produk | 2 uur | .6 vk. meter |
| 2de produk | .6 uur | .7 vk. meter |
| 3de produk | 3 uur | .2 vk. meter |

Om die probleem te formuleer identifiseer ons

3 veranderlikes nl. die vervaardiging van die drie produkte in hoeveelhede x, y en z vir die eerste, tweede en derde produk onderskeidelik.

Die totale wins, w, word gegee deur

$$w = 5x + 4y + 7z \qquad (1)$$

Die beperkings op die beskikbare masjientyd en vloerruimte formuleer ons soos volg:

Die totale masjientyd gebruik:

$$2x + .6y + 3z + t = 500 \qquad (2)$$

Die totale vloerruimte gebruik:

$$.6x + .7y + .2z + v = 100 \qquad (3)$$

Die lineêre programmeringsprobleem is nou om die wins (w) soos gegee in vergelyking (1) 'n maksimum te maak onderhewig aan die beperkings gegee deur vergelykings (2) en (3) en die addisionele beperking dat geen veranderlike x, y, z, t of v negatief mag wees nie. By die oplossing van die probleem sal die waardes (hoeveelhede) wat bepaal is vir x, y en z dui op die produkmengsel terwyl t en v die ledige masjientyd en onbenutte vloerruimte respektiewelik sal aandui.

Die basiese aannames waaraan 'n programmeringsprobleem moet voldoen om dit as 'n lineêre programmeringsprobleem te kan formuleer is die volgende:

1. Lineariteit. Die doelfunksie, (1) in ons voorbeeld, en die beperkings, (2) en (3) in ons voorbeeld, moet lineêre funksies, d.w.s. reglynig, wees.
2. Kontinuïteit van veranderlikes. Die aanname is dat die veranderlikes nie beperk is tot heeltallige waardes nie maar ook breukwaardes kan aanneem.
3. Deterministiese aard van probleem. Die aanname is dat die probleem deterministies van aard is, d.w.s. al die koëffisiente in die model is veronderstel om konstantes en bekend, te wees.

Die formulering van 'n probleem, in besonder die lineêre programmeringsprobleem, is nie 'n eksakte proses nie. Die formulering self is ook nie noodwendig 'n eenmalige proses wat van die oplossing van die probleem geskei kan word nie. Dit kan gebeur, en dit is nie die uitsondering nie, dat die oplossing van die probleem tekortkominge in die formulering aandui wat 'n herformulering genoodsaak. Die oplossing mag bv. wys dat beperkings wat noodsaaklik is in die probleem nie in ag geneem is nie. Op hierdie stadium kan miskien opgemerk word dat dit onverstandig sou wees om enige lineêre programmeringsoplossing sonder meer te aanvaar, veral waar die model nog in die ontwikkelingstadium is. Indien dit nie moontlik is om 'n bepaalde lineêre programmeringsoplossing in die lig van die probleemsituasie te „verklaar" nie sal dit die moeite loon om die formulering weer te ondersoek. Hierdie ondersoek en „verklaar" van 'n oplossing in die lig van die probleemsituasie dra ook veel by om 'n beter aanvoeling vir die probleem te ontwikkel.

Die formulering van 'n lineêre programmeringsprobleem sluit gewoonlik die volgende stappe in:

1. Identifiseer die veranderlikes in die probleem wat gewoonlik in drie groepe (Beale 1968) val, nl.
   (a) Verkryging van grondstowwe: Die veranderlikes het betrekking op die verkryging van die verskillende grondstowwe hetsy deur aankope, uit voorraad of ander bronne.
   (b) Produksie van eenhede: Die veranderlikes het betrekking op die produksie van die verskillende eenhede.
   (c) Verskuiwings: Die veranderlikes het betrekking op alle verskuiwings in die stelsel bv., van fabriek na die mark, tussen fabrieke, van fabriek na magasyne, ens.
2. Besluit op 'n optimaliseringskriterium, wat ons hierbo die doelfunksie genoem het, — bv., die maksimalisering van wins, die minimalisering van koste, die minimalisering van variasie in die arbeidsmag, ens.
3. Met verwysing na (1), bepaal die koëffisiente van die doelfunksie. Vanselfsprekend is die koëffisiente die marginale verandering in die doelfunksie geassosieer met 'n verandering in die betrokke veranderlike.
4. Identifiseer die beperkings in die probleem wat hoofsaaklik in 5 groepe (Beale 1968) val, nl.

(a) Beskikbaarheid: Van grondstowwe, ens.

(b) Kapasiteite: Van fabriek, masjiene, arbeidsmag, finansiële bronne, ens.

(c) Kwaliteite: Van produk, ens.

(d) Vraag: Waarin voorsien moet word.

(e) Materiaalbalansering: bv. Voorraad aan einde van vorige periode + voorraad gekoop en/of geproduseer gedurende periode - voorraad verkoop en/of verbruik gedurende periode = voorraad aan einde van periode.

5. Bepaal die koëffisient van elke veranderlike in elke beperkingsvergelyking, d.w.s. die bydrae in die beperkingsvergelyking deur 'n eenheidsverandering in die veranderlike.

6. Bepaal die regterkant (bv. die totale masjienure 500 uur en die totale vloerruimte 100 vk. meter in ons voorbeeld) vir elke beperkingsvergelyking.

Op hierdie stadium kan die lineêre programmeringsprobleem in 'n vorm soos die voorbeeld geformuleer word. In die geval waar die beperkings of doelfunksie nie lineêr is nie is dit dikwels moontlik om 'n bevredigende lineêre benadering te gebruik. Dit is belangrik om te onthou dat die lineêre programmeringsmodel slegs 'n model van die werklike probleemsituasie is en dat dit nie realisties is om te verwag dat elke aspek van die probleemsituasie in die model weerspieël moet word nie. Wat wel van die model verwag kan word en waarna gestrewe moet word, is dat dit die essensiële eienskappe van die probleemsituasie bevat en as basis kan dien om die globale effek van veranderings in die beheerbare veranderlikes te ondersoek. Die formulering van 'n probleem in lineêre programmeringsvorm het die voordeel dat binne die raamwerk van die geformuleerde probleem 'n wiskundig optimale oplossing vir die probleem gewaarborg kan word. Hiermee bedoel ons dat die oplossing wat die praktyk betref slegs optimaal kan wees tot die mate wat die model wat ons geformuleer het die praktiese probleemsituasie korrek beskryf en tot die mate wat die koëffisiente wat ons gebruik saamgestel is uit betroubare inligting.

Soos genoem, kan 'n groot aantal programmerings probleme opgelos of benaderd opgelos word m.b.v. lineêre programmering wat dit 'n belangrike en nuttige tegniek maak. Dit is dan ook nie verbasend dat die meeste rekenaarmaatskappye etlike manjare spandeer het aan die ontwikkeling van programstelsels vir die oplos van lineêre programmeringsprobleme nie. So belangrik word die lineêre programmeringsprobleem beskou dat die beskikbaarheid van 'n doeltreffende lineêre programmeringsstelsel in die verlede soms as 'n vereiste gestel is by die aankoop van 'n rekenaar.

## INTERPRETASIE VAN DIE LINEêRE PROGRAMMERINGSPROBLEEMOPLOSSING

Die interpretasie van die lineêre programmeringsoplossing is voor die hand liggend. Trouens die veranderlikes is gerieflik gedefinieer en dit is nou 'n eenvoudige taak om die oplossing weer met die probleemsituasie te koppel. Die oplossing tot die geformuleerde probleem is egter net die een kant van die saak. Saam met die oplossing van die geformuleerde probleem kry ons die oplossing van 'n tweede lineêre programmeringsprobleem gebaseer op dieselfde basiese inligting beskikbaar vir die eerste probleem dog op 'n ander bepaalde wyse gerangskik. Om die twee probleme te onderskei word na die eerste probleem verwys as die primale probleem en na die tweede probleem as die duale probleem.

Die primale en duale oplossings is aanvullend en ons kry slegs 'n volledige beeld van die probleemsituasie indien na albei oplossings gekyk word. Die primale probleem kan ons beskou as 'n allokasieprobleem in die sin dat die skaars bronne aan die veranderlikes toegedeel word, anders gestel ons bepaal hoe die skaars bronne die beste benut kan word. Die duale probleem daarenteen is 'n waardebepalingsprobleem. Elke veranderlike in die duale probleem kan geassosieer word met 'n bepaalde beperking in die primale probleem en die hoeveelheid bepaal vir 'n duale veranderlike kan beskou word as 'n waarde wat geplaas word op die betrokke beperking in die primale probleem. Die interpretasie wat van die duale oplossingswaardes gemaak kan word is dat dit die marginale verandering in die optimum waarde, van die doelfunksie, gee indien die regterkant van die betrokke beperking met een eenheid verhoog word. Die praktiese nut is dat dit die aandag vestig op die beperkings, bv. kapasiteit, wat met vrug uitgebrei kan word. Verder gee die duale oplossing 'n indirekte wins of koste vir elke veranderlike in die primale probleem. Die interpretasie hiervan is dat dit die effek op die optimum wins, w, gee indien afgewyk word van die voorgeskrewe primale oplossing.

Ons illustreer die voorgaande kortliks aan die hand van dieselfde numeriese voorbeeld.

Die oplossing van die primale probleem is soos volg:

$x = 0.00$, die aantal items van die eerste produk
$y = 101.01$, die aantal items van die tweede produk
$z = 146.46$, die aantal items van die derde produk
$t = 0.00$
$v = 0.00$
$w = 1429.26$, die totale wins.

D. w.s. slegs produkte van tipe twee en drie word vervaardig en masjientyd en vloerruimte word ten volle benut.

Die duale probleem se oplossing is soos volg:
$t' = 2.07$, die waarde geplaas op die masjientyd
$v' = 3.94$, die waarde geplaas op die vloerruimte
$x' = -1.5$, die indirekte wins geassosieer met die veranderlike x (eerste produk) in die primale probleem.

Hieruit kan ons aflei dat as ons die totale masjientyd met een uur kan vermeerder kan ons verwag om 'n program saam te stel met 'n wins R2.07 hoër as in die vorige geval, soortgelyk vir die vloerruimte. Sou dit nodig wees om van die optimum oplossing, soos gegee, af te wyk deur ook van die eerste produk te produseer kan ons verwag dat vir elke eenheid van produk een wat geproduseer word die wins met R1.50 sal daal (die produksie van die tweede en derde produk sal in die geval moet afneem om masjientyd en vloerruimte aan produk een beskikbaar te stel).

Hier wil ons weereens beklemtoon dat die oplossing van die duale probleem volg uit die oplossing van die primale probleem en nie die formele oplos van 'n tweede probleem impliseer nie. Die oplossing van die lineêre programmeringsprobleem gee dus nie alleen net die oplossing van die geformuleerde allokasieprobleem nie maar stel ook terselfdertyd die inligting vir 'n marginale analise by die optimumpunt beskikbaar.

Om saam te vat dus, aan die hand van die oplossing van die duale probleem kan vrae soos die volgende beantwoord word:

(a) Hoe verander die optimum waarde van die doelfunksie indien een van die beperkings verander word — bv., by kapasiteit beperkings kan bepaal word waar uitbreidings die effektiefste sal wees.
(b) Wat is alternatiewe optimale oplossings? Wat is die invloed op die kostefunksie indien afgewyk word van die optimum oplossing?
(c) Watter prysverandering in die prys geassosieer met 'n veranderlike (bv. grondstof) moet intree voordat die veranderlike ingesluit kan word by 'n optimale oplossing (of weggelaat moet word).

## REKENAARPROGRAM FASILITEITE

'n Lineêre programmeringsprobleem kan alleen doeltreffend opgelos word met behulp van 'n berekenaar. Op die oomblik is rekenaarprogramme beskikbaar wat lineêre programmeringsprobleme met tot ongeveer 4000 beperkings kan oplos.

So 'n programstelsel bied gewoonlik die volgende fasiliteite:

(a) Die vereenvoudiging van die opstel en verandering van die koëffisiente matriks.
(b) Die oplos van die primale en duale probleem.
(c) Die opstel van 'n duidelike uiteengesette verslag van die oplossing.
(d) Die moontlikheid om die regterkante en die koste-elemente as parameters te beskou en die oplossingsgebied vir elke geval te vind.

## *LITERATUUR*


1. *Baumol, W. J.*
*Economic Theory and Operations Analysis, Prentice-Hall, 1961.*
2. *Beale, E. M. L.*
*Mathematical programming in practice — Pitman and Sons Ltd.. 1968.*
3. *Dantzig, G. B.*
*Linear programming and extensions — Princeton University Press. 1963.*
4. *Dorfman, R., Samuelson, P. A., Solow, R. M.*
*Linear programming and economic analysis — McGraw-Hill, 1958.*
5. *Hillier F. S., Lieberman G. J.*
*Introduction to operations research — Holden-Day, Inc. 1967.*