Taktiese produksiebeplanning met behulp van lineêre programmering — 'n praktiese toepassing

J.T. Meij

Departement Meganiese Ingenieurswese, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch

In this paper a linear programming (LP) model for aggregate production planning is given. This is a general model that can be used in various production situations. It optimizes the monthly planning of human resources, production quantities and inventories on the medium term (e.g. a 12 month planning horizon) for a multi-department, multi-product production facility. A computer programme was developed for the model, making use of a standard LP package. In practical applications savings of up to 33% of variable cost were obtained.

S. Afr. J. Bus. Mgmt 1979, 10: 131 – 135

In hierdie artikel word 'n lineêre programmeringsmodel (LP) vir aggregeat-produksiebeplanning gegee. Dit is 'n algemene model wat in 'n verskeidenheid van produksiesituasies gebruik kan word. Dit optimiseer die maandelikse beplanning van mannekrag, produksiehoeveelhede, en voorrade op die mediumtermyn (bv. 'n beplanningshorison van 12 maande) vir 'n multi-departementele, multi-produk-produksiefasiliteit. 'n Rekenaarprogram is vir die model ontwikkel, wat van 'n standaard LP-pakket gebruik maak. In praktiese toepassings is besparings van tot 33% van veranderlike koste verkry.

S.-Afr. Tydskr. Bedryfsl. 1979, 10: 131 – 135

In die beplanningstaak van die produksiebestuurder kan daar tussen drie fases van produksiebeplanning onderskei word:

- Strategiese produksiebeplanning – die meer langtermyn aspekte van vestiging, uitleg en materiaalhantering, kapasiteits- en toerustingsbeplanning;
- Taktiese produksiebeplanning – die mediumtermyn aspekte van produksiehoeveelheid-, voorraadvlak-en arbeidsmagbeplanning;
- Operasionele produksiebeplanning – korttermyn aspekte soos skedulering van die dag tot dag produksie.

Die probleem van taktiese produksiebeplanning (TPB)

Die meerderheid vervaardigingsondernemings het te doen met 'n fluktuierende vraag na hulle produkte of dienste. Daarby het 'n onderneming gewoonlik beperkte produksiefaktore soos byvoorbeeld vervaardigingstoerusting. Indien die onderneming sy winste wil maksimeer of teen die laagste koste wil produseer, ontstaan daar 'n beplanningprobleem naamlik dat in 'n fluktuierende vraag voorsien moet word met beperkte bronne. Hierdie probleem het al heelwat aandag in die literatuur geniet en verskeie benaderings is gevolg vir die oplossing daarvan. Die meeste benaderings was tot dusver van teoretiese waarde en min praktiese toepassings is gerapporteer. Die rede hiervoor kan grootliks aan drie eienskappe van die probleem toegeskryf word, naamlik:

- Die groot aantal veranderlikes wat voorkom.
- Die feit dat die kostestruktuur van die onderneming kompleks is en moeilik gemodelleer kan word.
- Die bestuur van 'n onderneming het gewoonlik sekere voorkeure wat moeilik in die model voorgestel kan word.

Beskikbare modelle vir taktiese produksiebeplanning

Daar bestaan 'n verskeidenheid van benaderings vir die doen van taktiese produksiebeplanning en elke benadering maak gebruik van 'n sekere modelformulering en oplossingsmetodiek.

J.T. Meij

Departement Meganiese Ingenieurswese, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch 7600, Suid-Afrika

Ontvang 30 Julie 1979

Oplossingsbenaderings

Aanvanklik is modelle ontwikkel waarvan wiskundige optimale oplossings moontlik is. Veral twee rigtings is ingeslaan:

- Die strukturering van die probleem as 'n lineêre programmeringsmodel (Hanssman & Hess)¹ en
- Gebaseer op die aanname van kwadratiese kostefunksies, die ontwikkeling van lineêre besluitreëls vir die vasstelling van arbeid-, voorraad- en produksievlakke. (Holt, Modigliani & Simon)².

In hierdie stadium was hoëspoed rekenars nie beskikbaar nie en die hantering van 'n groot aantal veranderlikes nie moontlik nie. Meer onlangs is daar weg beweeg van die wiskundige optimalisasie-begrip in die rigting van numeriese oplossingsmetodes. Heuristiese (Jones)³ en Rekenaar-soek modelle (Taubert)⁴ is veral populêr onder navorsers.

'n Volledige bespreking van al die bogenoemde benaderings kan gevind word in Meij⁵.

Lineêre programmering vir taktiese produksiebeplanning

Die multidepartement-, multiproduk-produksiesisteem In Fig. 1 word 'n skematiese voorstelling gegee van 'n tipiese produksiesisteem waarin verskillende produkte deur verskillende departemente vervaardig word. Produkte wat vervaardig word deur voorafgaande departemente word of gebruik vir die vervaardiging van subsamestellings, of klaarprodukte, of direk verkoop. Tussen die departemente kom voorraadstore gewoonlik voor waarin 'n hoeveelheid voorraad van die produkte van die betrokke departement gehou kan word. Hierdie store hoef nie noodwendig fisies geskei te wees nie maar kan in een groot sentrale stoor gehuisves word. Klaarprodukte word gewoonlik in 'n klaarprodukstoor geberg. Daar bestaan 'n mark vir onderdele en subsamestellings.

In elke departement is daar 'n aantal werktuie wat gebruik word vir die vervaardiging van die 'produkte' van die departement. Die masjiene word beheer deur 'n span direkte arbeiders (werkers). 'n Toesighouer of 'n aantal toesighouers (afhanklik van die grootte van die onderneming en departement) beheer die werk in die afdeling.

Elke toesighouer hou toesig oor 'n vasgestelde aantal werkers. 'n Departement hoef nie noodsaaklikerwys 'n departement te wees soos dit in die organisasiestruktuur voorkom nie maar enige groep masjiene of arbeiders wat logieserwys saam hoort.

'n Lineêre programmeringsmodel vir die produksiesisteem

Von Lanzaener het 'n lineêre programmeringsmodel vir die produksiesisteem wat hierbo bespreek is, wiskundig geformuleer. Hierdie model is in 'n aantal opsigte verbeter en gewysig deur die skrywer⁵ (onder andere, om aan te pas by Suid-Afrikaanse omstandighede). Die gewysigde model word hieronder volledig gegee. Hierdie model is ook getoets op 'n stel hipotetiese data⁵.

Die doelwitfunksie

Minimeer

$$C_T = \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left[c_{jt}^i + \frac{P_{jt} (1 + k_n)}{\gamma_{jt}^i} \right] X_{jt}^i$$

(produksiekoste)

$$+ z_{jt}^i \cdot H_{jt}^i$$

(voorraaddrakoste)

$$+ r_{jt}^i \cdot b \cdot B_{jt}^i$$

(agterstallige bestellingskoste)

$$+ r_{jt}^i \cdot s \cdot S_{jt}^i$$

(verlore bestellingskoste)

$$+ p_{jt} \cdot \lambda_j \cdot W_{jt}^i$$

(ledige arbeidskoste)

$$+ h_j \cdot G_{jt}$$

(huurkoste — direkte arbeid)

$$+ f_j \cdot F_{jt}$$

(afdankkoste — direkte arbeid)

$$+ p_{jt}^s \cdot W_{jt}^s$$

(toesighoudingsarbeidskoste)

$$+ h_j^s \cdot M_{jt}$$

(huurkoste — toesighouers)

$$+ f_j^s \cdot N_{jt}$$

(afdankkoste — toesighouers)

(1)

Fig. 1 Die multidepartement-, multiproduk-produksiesisteem.

Onderhewig aan die beperkings:

Materiaalbalansbeperkings

$$H_{jt-1}^i + \sum_{n=1}^3 X_{jtn}^i - H_{jt}^i - B_{jt-1}^i + B_{jt}^i + S_{jt}^i - \sum_{x=j+1}^J \sum_{m=1}^I \sum_{n=1}^3 \alpha_{jx}^{im} X_{xtn}^m = D_{jt}^i \quad (2)$$

vir alle i , t en $j = 1, 2, \dots, J-1$

$$H_{jt-1}^i + \sum_{n=1}^3 X_{jtn}^i - H_{jt}^i - B_{jt-1}^i + B_{jt}^i + S_{jt}^i = D_{jt}^i \quad (3)$$

vir alle i en t .

Stoorruimtebeperkings

$$\sum_{i=1}^I \beta_j^i H_{jt}^i \leq L_{jt} \quad (4)$$

vir alle j en t .

Veiligheidsvoorraadbeperkings

$$H_{jt}^i - Q \left[\sum_{x=j+1}^J \sum_{m=1}^I \sum_{n=1}^3 \alpha_{jx}^{im} X_{xtn}^m \right] \geq Z_j D_{jt}^i \quad (5)$$

vir alle i , j en t .

Hierin word dus voorsiening gemaak vir 'n onderste begrensing op die voorraadvlak. Die onderste grens is 'n lineêre funksie van die vraag (sowel 'intern' as 'ekstern').

Kapasiteitsbeperkings

$$\sum_{i=1}^I \tau_j^i X_{jtn}^i \leq d_{tn} \cdot s_{jn} \cdot a_j \cdot m_j \quad (6)$$

vir alle j , n en t .

In hierdie vergelyking word die kapasiteite R_{jt}^i en Q_{jt}^i wat deur Von Lanzanauer gedefinieer is, duideliker omskryf. Dit word hier uitgedruk as die totale standaardtye (in standaardmasjieminute) wat per periode per departement beskikbaar is.

Direkte arbeidsmagbalansbeperkings

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \frac{1}{\gamma_{jt}^i} X_{jt1}^i + W_{jt}^i \\ & - \sum_{i=1}^I \frac{1}{\gamma_{jt}^i} X_{j,t-1,1}^i \\ & - W_{jt-1}^i - G_{jt-1} + F_{jt-1} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

vir alle j en t .

Toesighouding-arbeidsmagbalansbeperkings

$$W_{jt}^i - W_{jt-1}^i - M_{jt-1} + N_{jt-1} = 0 \quad (8)$$

vir alle j en t .

Beheerspanwydtebeperkings

$$\frac{1}{\delta_j} \sum_{i=1}^I \frac{1}{\gamma_{jt}^i} X_{jt1}^i - W_{jt}^i \leq 0 \quad (9)$$

vir alle j en t .

Let op dat die teken, $\leq$, impliseer dat afdanking *nie* noodwendig vereis word *nie*.

Simbooldefinieering

Waar:

- i = die aantal produkte (1, 2, ... I)
- j = die aantal departemente (1, 2, ... J)
- t = die aantal tydperiodes (1, 2, ... T)
- n = die produksietyp (bv. normale tyd of oortyd) (1, 2, 3)
- D_{jt}^i = die bekende 'eksterne' vraag in eenhede
- H_{jt}^i = die eindvoorraad in eenhede
- X_{jtn}^i = die produksiehoeveelheid in eenhede
- B_{jt}^i = die agterstallige vraag in eenhede
- S_{jt}^i = die verlore vraag in eenhede
- W_{jt}^i = die hoeveelheid 'ledige' werkers
- G_{jt} = die hoeveelheid werkers gehuur
- F_{jt} = die hoeveelheid werkers afgedank
- W_{jt}^* = die hoeveelheid toesighouers
- M_{jt} = die hoeveelheid toesighouers gehuur
- N_{jt} = die hoeveelheid toesighouers afgedank
- L_{jt} = die maksimum stoorkapasiteit
- C_T = die totale koste
- Q = 'n veiligheidsvoorraad konstante vir 'interne' vraag
- Z_j = 'n veiligheidsvoorraad konstante vir 'eksterne' vraag
- α_{jx}^{im} = die aantal eenhede van produk i , in departement j , benodig vir die vervaardiging van produk m in departement x
- β_j^i = die stoorruimte benodig vir een eenheid van 'n produk
- τ_j^i = die standaard produksietyd per eenheid
- d_{tn} = die hoeveelheid werksdae beskikbaar per periode
- s_{jn} = die aantal skofte per werksdag
- a_j = die standaardtyd (in standaardminute) per skof
- m_j = die aantal masjiene per departement
- γ_{jt}^i = die aantal eenhede wat deur een werker per periode vervaardig kan word
- δ_j = die beheerspanwydte ('span of control')
- c_t = die totale koste per periode

- c_{jt}^i = die grondstofkoste per eenheid
 p_{jt} = die normale produksietyd loon per werker
 k_n = die eskalasiefaktor vir die loon per werker vir oortydwerk
 z_{jt}^i = die voorraaddrakoste per eenheid
 r_{jt}^i = die verkoopsprys per eenheid
 b = 'n verhogingsfaktor vir agterstallige bestellings
 s = 'n verhogingsfaktor vir verlore verkope
 λ_j = 'n loonverminderingfaktor vir ledige arbeid
 h_j = die huurkoste van werkers
 f_j = die afdankingskoste van werkers
 p_j^s = die salaris per toesighouer per periode
 h_j^s = die huurkoste van toesighouers
 f_j^s = die afdankingskoste van toesighouers
 H_{j0}^i = die beginvoorrade (beginkondisie)
 B_{j0}^i = die beginwaarde van agterstallige bestellings (beginkondisie)
 H_{jT}^i = die verlangde eindvoorraad (eindkondisie)

Toepassing by 'n vervaardigingsonderneming

In hierdie deel word 'n praktiese toepassing van die model by 'n vervaardigingsonderneming getoon. Om klaarblyklike redes moet die onderneming anoniem bly. Daarom is alles moontlik gedoen om aan die een kant die data so praktykgetrou soos moontlik te hou maar aan die ander kant die identiteit van die onderneming te beskerm.

'n Afdeling van die onderneming vervaardig produkte vir die voedselbedryf. Hierdie afdeling is bestudeer. Daar word 32 verskillende produkte vervaardig op twee groepe masjiene, met drie masjiene van dieselfde tipe per groep. Elkeen van die masjiengroepe word vervolgens beskou as 'n 'departement' in die voorafgaande model. Daar word aanvaar dat daar altyd genoeg grondstof beskikbaar sal wees vir die vervaardigingsproses. Daar vind ook geen interaksie plaas tussen die 'departemente' nie. Verdere aannames word in die volgende afdeling bespreek.

Die vraag na die produkte is seisoenaal (Fig. 2) soos gewoonlik vir dié tipe produk verwag word, en dus bestaan die probleem van taktiese of mediumtermyn produksiebeplanning hier wel. Aangesien dit die beleid van die onderneming is om nie van arbeidsmagveranderinge gebruik te maak om produksieveranderinge teweeg te bring nie, is die arbeidsbeplanningsgedeelte van die model nie hier gebruik nie.

Fig. 2 Die verkoops patroon van Produk 20 vir drie agtereenvolgende jare.

Wysigings aan die teoretiese model

Die volgende aannames ten opsigte van weglatings by en wysigings aan die voorafgaande model is gemaak:

- Daar word aangeneem dat voldoende grondstof te alle tye beskikbaar is
- Volledige dienslewering word aanvaar. Geen uit-voorraadsituasies kan dus voorkom nie — 'n beleids-aspek. Anders gestel, die koste van uitvoorraad wees is baie hoog
- Die produkte word afsonderlik gehanteer (die beplanning word dus per produk gedoen) en nie op een of ander gedwonge manier saamgevoeg tot kwasi-produkte nie
- As gevolg van die tweede aanname hierbo, geen verlies aan verkope nie. Dus $S_{jt}^i = 0$
- Die afdeling bestaan uit twee departemente ($J = 2$) en in elke departement word sekere vooraf gespesifiseerde produkte vervaardig
- Arbeidsmagveranderinge mag nie gebruik word vir produksieveranderinge nie, met ander woorde die afdank en huur van arbeid is relatief duur
- 'n Twaalfmaande beplanningshorison word beskou ($t = 1, 2 \dots 12$)
- Geen koste-eskalasies vind plaas gedurende die beplanningstydperk nie
- Daar is voorsien vir 32 produkte. Sommige produkte mag op die mark geplaas word of van die mark verdwyn
- Daar is net een stoor, naamlik 'n klaarprodukte-stoor.

Die rekenaarpakette wat gebruik is

Daar is gebruik gemaak van die UNIVAC 1110-rekenaar van die Universiteit van Stellenbosch. Om 'n groot lineêre programmeringsprobleem te hanteer, word in die eerste plek 'n goeie matriksgenerator benodig. Hiervoor is die GAMMA 3.3⁷-rekenaarpakket van UNIVAC baie geskik. Die FMPS⁸ (Functional Mathematical Programming System)-pakket van UNIVAC is gebruik vir die berekening van die optimale oplossings. Elke rekenaarloop is in vier fases gedoen:

- Fase 1 – matriksontwikkeling
- Fase 2 – optimisasie
- Fase 3 – verslagontwikkeling, en
- Fase 4 – verslagskrywing.

Die resultate

In die algemeen lewer die rekenaarstelsel wat gebruik is die volgende resultate:

- 'n Volledige produksieplan vir elke produk oor die hele beplanningshorison
- Die hoeveelhede voorraad wat gedurende elke periode gedra moet word
- Wanneer oortyd gewerk moet word, op watter produkte en die hoeveelhede van elke produk
- Die totale optimale koste asook die verskillende koste (produksie-, oortyd- en voorraadkoste) waaruit dit saamgestel is
- 'n Globale produksieplan in masjienskote benodig

Fig. 3 'n Vergelyking tussen die hoeveelheid masjienskote per maand wat werklik gebruik is en wat deur die model voorgestel word vir minimum koste.

teenoor die beskikbare masjienskote per periode (dus die beskikbare kapasiteit)

- Verskillende verslae soos produksiehoeveelheid-, voorraad- en kosteverslae.

'n Vergelyking is gedoen tussen die resultate van die TPB-model en die werklike produksie vir 'n spesifieke jaar. Die model gee 'n optimale koste van R1 009 350 in vergelyking met die R1 025 825 van die werklikheid. Die verskil van R16 475 kom hoofsaaklik voor as gevolg van laer voorraadvlakke wat deur die model gehandhaaf word. 'n Vergelyking van die 'beïnvloedbare koste', naamlik oortydskoste, voorraadkoste en ledigetydkoste, toon 'n besparing van byna 33% deur die model in vergelyking met die werklikheid (R33 616 deur die model terwyl die bedrag in werklikheid R50 091 was).

Die globale produksieplan wat deur die model voorgestel word, toon vir beide masjiengroepe 'n baie goeie ooreenkoms met die werklikheid soos Fig. 3 en Fig.

Fig. 4 'n Vergelyking tussen die hoeveelheid masjienskote per maand wat gebruik is en wat deur die model voorgestel word vir minimum koste.

4 toon. Aan die ander kant toon Fig. 5 die groot verskil in voorraadhoeveelhede. Die besondere hoë voorraadvlakke wat in werklikheid gedra word, kan toegeskryf word aan 'n verskeidenheid van faktore, waaronder swak beplanning van die voorrade van individuele produkte, die onsekerheidsfaktor en gebrek aan beplanning van produksiehoeveelhede vir individuele produkte.

Die produksieplanne van die model vir die individuele produkte verskil heelwat van die werklikheid en geen algemene patroon kan hieruit afgelei word nie.

Fig. 5 'n Vergelyking tussen die hoeveelheid stoorspasie wat werklik gebruik is en wat deur die model voorgestel word vir minimum koste.

Die vergelyking wat hier gedoen is, is in wese onregverdig teenoor die model. 'n Vergelyking van werklikebeplanning en model-beplanning sal 'n beter beeld gee van die prestasie. Werklike maandelikse produksiebeplanning per produk word egter nie deur die onderneming gedoen nie en is derhalwe nie beskikbaar nie. Die verwagting is egter dat die model in so 'n vergelyking selfs beter resultate sal lewer.

Verwysings

1. HANSSMAN, F. & HESS, S.W. A linear programming approach to production and employment scheduling. 1960. *Mgmt Technol.* 1: 46–51.
2. HOLT, C.C. MODIGLIANI, F. & SIMON, A. A linear decision rule for production and employment scheduling. 1955. *Mgmt Sci.* 2: 1–30.
3. JONES, C.H. Parametric production planning. *Mgmt Sci.* 13(11): 843–865.
4. TAUBERT, W.H. A computer search solution of the aggregate scheduling problem. 1968. *Mgmt Sci.* 14: 343–359.
5. MEIJ, J.T. Taktiese produksiebeplanning met behulp van lineêre programmering. Ph.D. Verhandelung, Universiteit van Stellenbosch, Stellenbosch, South Africa. 1977.
6. VON LANZENAUER, C.H. Production and employment scheduling in multistage production systems. 1970. *Naval Res. Log. Qrtly.* 17: 193–198.
7. SPERRY UNIVAC 1100 SERIES, *Gamma 3.3-Programmer Ref.* UP-8199.
8. SPERRY UNIVAC 1100 SERIES, *Functional Mathematical Programming System (FMPS) — Programmer Ref.* UP-8198.