Lineêre programmerings- en gemengde heeltal-programmeringsmodelle vir die evaluasie van kapitaalbeleggings in 'n onderneming met net een afdeling
Deel II

F. H. D. Conradie en P. H. van den Berg

In Part I of this series of two articles, the reader was introduced to linear mixed integer programming techniques in the evaluation of capital investment. In this article, the interpretation, use, and limitations of the dual variables are discussed. Numerical examples are given to illustrate the application of the technique under consideration, as well as the results obtained. The model used was designed for a one-division organization, and takes into account nine types of restrictions. Provision is also made for the use of long-term financing, whereas other models reported in the literature to date, could only cope with short-term financing of proposed projects.
Copies of Part I, setting out the model in full, as well as an English translation, are available from the authors.
S. Afr. J. Bus. Mgmt. 1979, 10: 65–73

In Deel I van hierdie reeks van twee artikels is die gebruik van lineêre en gemengde heeltal-programmeringstegnieke in die evaluering van voorgestelde kapitaalinvestering uiteengesit. In hierdie artikel word die interpretasie, gebruik en beperkings van die duaalveranderlikes bespreek. Numeriese voorbeelde word ook gegee om die toepassing van die tegniek onder bespreking, asook die resultate verkry, te illustreer. Die model wat gebruik word, is ontwerp vir 'n onderneming met net een afdeling, en neem nege soorte beperkings in aanmerking. Voorsiening word ook gemaak vir die gebruik van langtermyn finansiering, alhoewel ander modelle wat tot dusver in die literatuur beskryf is, slegs korttermyn finansiering van voorgestelde projekte kon behartig.
Afskrifte van Deel I, wat die model volledig uiteensit, asook 'n Engelse vertaling, kan van die skrywers verkry word.
S.-Afr. Tydskr. Bedryfsl. 1979, 10: 65–73

F. H. D. Conradie
Eerste Ingenieur (Stelselbedryf), EVKOM, Megawatt Park, Sandton.

en P. H. van den Berg*
Senior Lektor, Skool vir Bedryfsleiding, UNISA, Posbus 392, Pretoria 0001

*Aan wie alle korrespondensie gerig moet word

As inleiding word die leser se geheue verfris wat betref 'n paar lineêre programmeringsbeginsels wat belangrik is vir die interpretasie van die duaalveranderlikes, wat in Deel I volledig bespreek is.[1] Daarna word die duaalveranderlikes in meer besonderhede beskou.

Volgens die teorie van lineêre programmering bestaan daar 'n duaalveranderlike (in die duaal formulering) vir elke beperking in die primaal formulering van die probleem.[2, p. 119] Geassosieer met elke duaalveranderlike is daar ook 'n duaal speling-veranderlike.

In die algemeen geld dit dat die primaalveranderlikes na fisiese kwantiteite verwys terwyl die duaalveranderlikes na monetêre kwantiteite verwys.[3, p. 110] Dit kan ook anders gestel word: in die primaal-probleem word hulpmiddele toegeken terwyl die gebruik van die hulpmiddele in die duaal-oplossing geëvalueer word.[4, p. 27]

Die duaalveranderlike is 'n marginale waarde (in monetêre eenhede) van 'n ekstra eenheid van 'n skaars hulpbron.[2, p. 127] Die waarde van die duaalveranderlike wat verkry word na die optimisering van die doelfunksie toon aan hoeveel geld (monetêre eenhede) daar bestee kan word per eenheid van 'n duaalveranderlike, sodat 'n addisionele 'eenheid van die skaars hulpbron' bekom kan word, ten einde die optimum waarde van die doelfunksie te verbeter.[3, p. 110, p. 111]

Voordat duaalveranderlikes gebruik word, moet daar vasgestel word wat die geldigheidsgebied van hierdie duaalveranderlikes is. Dit is belangrik om te onthou dat duaalveranderlikes bereken word en ook geïnterpreteer moet word, onder die besef dat dit 'n aanname is dat 'alle ander veranderlikes onveranderd bly' en dat net een duaalveranderlike (hulpmiddel-waarde) toegelaat word om op 'n keer te verander.[4, p. 26]

Die primaal speling-veranderlikes toon die aantal eenhede aan van die hulpmiddele wat nie gebruik word nie.[2, p. 52] Die duaal speling-veranderlike toon die relatiewe verlies (in monetêre eenhede) aan, in die verkryging van een addisionele eenheid van 'n spesifieke hulpbron.[4, p. 25]

Die duaalstelling van komplementêre speling[3, p. 111, 2, p. 129, 4, p. 24] is belangrik wanneer teorie in verband met die toepassing van lineêre programmering ontwikkel word en selfs wanneer oplossings geïnterpreteer word. Volgens hierdie stelling geld by die optimum oplossing dat:

(Primaal veranderlike) × (Duaal spelingveranderlike) = 0
(Primaal spelingveranderlikes) × (Duaalveranderlike) = 0

Interpretasie van die duaalveranderlikes

In die vorige artikel in hierdie reeks[1] is duaalveranderlikes geïdentifiseer. Die duaalveranderlikes is in hakies aangetoon aan die regterkant van elke vergelyking. In hierdie artikel word die vergelykingsnommer(s) wat die beperking aantoon waarmee die toepaslike duaalveranderlike geassosieer is, net onder die opskrif van elke tipe duaalveranderlike getoon.

Indien geen verwysings gegee word wanneer 'n duaalveranderlike geïnterpreteer word nie, dan is die interpretasie dié van die skrywers van hierdie artikel.

'n Simbool met 'n * daarby, toon die waarde van 'n veranderlike aan by die optimum waarde van die doelfunksie.

Alle vergelykings hier genoem, word in Deel I volledig bespreek.

Dividenduitbetaling-duaalveranderlike (Vergelyking (4.1) in Deel I)

Die duaalveranderlike σ_t^* verteenwoordig die verandering in die netto terminaalwaarde van die aanvaarde projekte (dit is, die doelfunksie van die probleem-formulering) vir 'n ekstra eenheid geld (Rand) wat uitbetaal word indien dividende uit die beperkte hoeveelheid kontant beskikbaar in periode t.

Terminaalwaarde-duaalveranderlike θ_t^* (Vergelyking (4.2) in Deel I)

Die duaalveranderlike θ_t^* verteenwoordig die verandering in die netto terminaalwaarde van die projekte wat aanvaar word (dit is, die doelfunksie van die probleem-formulering) vir 'n ekstra eenheid geld (Rand) beskikbaar in periode t uit die onderskeie komponente van die terminaalwaarde.

Korttermyn leenbeperking-duaalveranderlike β_{it}^* (Vergelyking (4.3) in Deel I)

Die duaalveranderlike β_{it}^* verteenwoordig die toename in die netto terminaalwaarde van die projekte wat aanvaar word vir 'n ekstra eenheid geld (Rand) waarmee die korttermynleenbeperking verhoog kan word in periode t en teen die trap i korttermynrentekoers.[5, p. 165] Die rentekoers styg trapsgewyse namate meer geld geleen word.

Hierdie duaalveranderlike β_{it}^* toon ook aan hoeveel (Rand) daar teen die rentekoers van trap i in periode t bestee kan word ten einde die netto terminaalwaarde (doelfunksie) te verbeter.[4, p. 78]

Langtermynleenbeperking-duaalveranderlike ξ_{It}^* (Vergelyking (4.4) in Deel I)

Die duaalveranderlike ξ_{It}^* verteenwoordig die toename in die netto terminaalwaarde van die projekte wat aanvaar word vir 'n ekstra eenheid geld (Rand) waarmee die langtermyn leenbeperking verhoog kan word in periode t en teen die trap I langtermyn rentekoers.

Hierdie duaalveranderlike ξ_{It}^* toon ook aan hoeveel (Rand) daar teen die rentekoers van trap I in periode t bestee kan word ten einde die netto terminaalwaarde (doelfunksie) te verbeter.

Terugbetalingsperiode-duaalveranderlike ψ_c^* (Vergelyking (4.5) in Deel I)

Die duaalveranderlike ψ_c^* verteenwoordig die verandering in die netto terminaalwaarde van die aanvaarde projekte (dit is, die doelfunksie van die probleemformulering) as die terugbetalingsperiode met een eenheid verleng word.

Interne hulpbron beskikbaarheid-duaalveranderlike μ_t^* (Vergelyking (4.6) in Deel I)

Die duaalveranderlike μ_t^* verteenwoordig die verandering in die netto terminaalwaarde van die projekte wat aanvaar word vir 'n ekstra eenheid van die interne hulpbron waarmee die beperkte hoeveelheid beskikbare hulpbronne verhoog kan word in periode. t[5, p. 128]

Hierdie duaalveranderlike μ_t^* toon ook aan hoeveel (Rand) daar vir 'n ekstra eenheid van die skaars interne hulpbron betaal kan word in periode t ten einde die netto terminaalwaarde (doelfunksie) te verbeter.

Eksterne hulpbron beskikbaarheid-duaalveranderlike δ_{kt}^* (Vergelyking (4.7) in Deel I)

Die duaalveranderlike δ_{kt}^* verteenwoordig die verandering in die netto terminaalwaarde van die aanvaarde projekte vir 'n ekstra eenheid van die eksterne hulpbron waarmee die beperkte hoeveelheid van die hulpbron beskikbaar verhoog kan word in periode t en teen die fase k koste.

Hierdie duaalveranderlike δ_{kt}^* toon ook aan hoeveel (Rand) daar vir 'n ekstra eenheid van die skaars hulpbron wat ekstern verkry kan word, betaal kan word teen die fase k koste van periode t ten einde die netto terminaalwaarde (doelfunksie) te verbeter.

Kontantbalans- en likwiditeits-duaalveranderlike ρ_t^* (Vergelykings (4.9, (4.10) en (4.11) in Deel I)

Die duaalveranderlike ρ_t^* is 'n geleentheidskoste[4, p. 74, 5, p. 24] wat die verandering verteenwoordig in die netto terminaalwaarde van die aanvaarde projekte vir 'n ekstra eenheid kontant (Rand) beskikbaar in periode, t[6, p. 56, 4, p. 74, 5, p. 24, 171] onder die aanname dat die versameling van aanvaarde projekte nie andersins verander nie.

Hierdie duaalveranderlike ρ_t^* kan ook omskryf word as die inkrementele saamgestelde rentekoers wat die opbrengs spesifiseer by die horisontydstip vir 'n ekstra eenheid geld (Rand) belê in periode. t[2, p. 144]

'n Ander interpretasie wat aan die duaalveranderlike ρ_t^* gegee kan word, is dat dit aantoon hoeveel (Rand) daar vir 'n ekstra eenheid kontant (Rand) in periode t betaal kan word ten einde die doelfunksie te verbeter.

Meervoudige projekbeperking-duaalveranderlike μ_j^* (Vergelykings (4.12) en (4.13) van Deel I)

Die duaalveranderlike μ_j^* verteenwoordig die waarde van die aanvaarde projekte. χ_j^* [5, p. 25] Anders gestel, μ_j^* verteenwoordig verandering in die netto terminaalwaarde van die aanvaarde projekte as een ekstra projek χ_j^* aanvaar word.[4, p. 75, 5, p. 164]

'n Ander interpretasie wat aan die duaalveranderlike gegee kan wórd, is dat dit die som van alle vloeie geassosieer met projekte, verwys na die horisontydstip, verteenwoordig.[4, p. 64, 5, p. 147, 164]

Gebruik en beperkings van duaalveranderlikes

Wanneer die primaal lineêre programmering-formulering van 'n probleem opgelos word, word daar ook skadupryse (die waardes van die beperkings), wat numeries dieselfde is as die duaalveranderlikes, bereken as 'n neweproduk. Die waardes van die duaalveranderlikes kan dus verkry word uit die oplossing van die primaal-formulering en dus hoef die duaal-formulering nie ook spesiaal opgelos te word nie. Die geldigheidsgebied van die skadupryse (duaalveranderlikes) word ook as deel van die primaal-oplossing gegee.

Soos gemeld in afdeling 1 moet daar vasgestel word wat die geldigheidsgebied van die duaalveranderlike is voordat die duaalwaarde gebruik word om afleidings en gevolgtrekkings te maak. Dit moet ook onthou word dat net een duaalveranderlike op 'n keer toegelaat word om te verander, terwyl al die ander duaalveranderlikes onveranderd bly.

Daar sal nou aangetoon word waarom die nut en belangrikheid van duaalveranderlikes na die mening van die skrywers oorbeklemtoon word.

Wanneer die numeriese oplossing van 'n lineêre program beskou word, sal opgelet word dat 'n groot aantal duaalveranderlikes reeds by een van die uiteindes van hulle geldigheidsgebied is. Dit is dus net moontlik om die duaalveranderlike te varieer in die een rigting: weg vanaf hierdie limiet (uiteinde). Gewoonlik word ook gevind dat die rigting waarin die duaalveranderlike wel gevarieer kan word, nie die rigting is waarin belang gestel word nie.

Alhoewel dit soms gebeur dat net een duaalveranderlike gevarieer hoef te word, is dit gewoonlik nie die geval nie. Selfs in die gevalle waar slegs een duaalveranderlike gevarieer hoef te word, word gewoonlik gevind dat sodra 'n uiteinde van die geldigheidsgebied vir hierdie duaalveranderlike bereik word, dit wenslik sou wees om 'n verdere duaalveranderlike te varieer. Dit mag nie gedoen word nie. Dus moet die probleem weer opgelos word.

Die aspekte van duaalveranderlikes wat direk verband hou met die evaluasie van kapitaalbeleggings word nou van nader beskou.

Die primaal-oplossing verskaf onder andere, die volgende antwoorde:

- Watter projekte gekies moet word
- Hoeveel geld in die onderskeie periodes geleen en uitgeleen moet word. (Gewoonlik kan slegs 'n beperkte hoeveelheid geld teen bepaalde rentekoerse geleen word)
- Hoeveel skaars hulpbronne, ander as kapitaal, van buite die firma verkry moet word in die onderskeie periodes

Wanneer die primaal-oplossing beskikbaar is vir bestudering en evaluering, dan is die volgende drie vrae nog onbeantwoord:

- In watter periodes sal die gebruik van addisionele fondse die winsgewendste wees?

Begrotingsbeperkings is selde absoluut. Gewoonlik kan begrotings gewysig word indien die finansiële aansporing voldoende is. Effens anders gestel, is die probleem dus om te bepaal in watter periodes die begrotingbeperkings minder streng gemaak moet word, ten einde 'n ander en/of groter versameling van projekte te selekteer.[6, p. 58]

Die duaalveranderlike ν_t^* word vir die doel hierbo omskryf, aanbeveel in die literatuur.[6, p. 57, 5, p. 171] Soos reeds aangedui, is 'n duaalveranderlike, eerstens, net bruikbaar binne die geldigheidsgebied daarvan; dit beperk die nut van die duaalveranderlike. Tweedens, en nog belangriker, is dit 'n voorwaarde dat die duaalveranderlike net geldig is indien die versameling gekose projekte nie gewysig word nie. Om addisionele fondse winsgewend te kan gebruik, moet ekstra projekte juis geselekteer word. Die versameling van gekose projekte verander dus en die duaalveranderlike geld nie meer nie.[6, p. 58]

- Wat is die maksimum rentekoerse wat betaal kan word vir die addisionele fondse in die onderskeie periodes, ten einde ekstra projekte te kan kies en die waarde van die onderneming te verhoog?

Duaalveranderlikes kon ook nie inligting verskaf om hierdie vraag te beantwoord nie.

- In die geval waar 'n lineêre programmering-formulering gebruik word (in teenstelling met gemengde heeltalprogrammering of heeltal-programmering), hoe moet die breukdeel gekose projekte op of af aangepas word om geen (nul) of 'n heel (een) projek te verkry?[6, p. 58]

Die duaalveranderlikes kan ook nie die nodige inligting verskaf om hierdie vraag te beantwoord nie.

Dit is dus duidelik dat die nut en belangrikheid van die duaalveranderlikes in die oplossing van numeriese (praktiese) evaluasie van kapitaalbeleggingsprobleme oorbeklemtoon word.

Sommige van die antwoorde wat die duaalveranderlikes nie kon verskaf tot die drie probleme hierbo gestel nie, kan wel verkry word deur die toepassing van gemengde (en suiwer) heeltal-programmeringsensitiwiteitsanalise.[6, p. 60]

Die skrywers is dit egter eens dat in die teoretiese (nie numeriese) ontwikkeling van wiskundige programmeringstegnieke in die evaluasie van kapitaalbeleggings, die duaalveranderlikes wel belangrik en nuttig is omdat dit insig in die probleem bevorder.

'n Belangrike grootheid wat wel van die duaalveranderlikes afgelei kan word, is die verdiskonteerkoers. Die verdiskonteerkoers vir periode t is gelyk aan $[(\rho_t^* / \rho_{t+1}^*)] - 1$.[5, p. 163] Die verdiskonteerkoers is altyd gelyk aan of groter as die ooreenstemmende rentekoers vir daardie periode.

Numeriese voorbeelde

Die resultate van nege numeriese probleme wat opgelos is, word bespreek ten einde die gebruik van lineêre programmering en gemengde heeltal-programmering te illustreer.

Die resultate van numeriese probleme wat gebaseer is op denkbeeldige data kan nie gebruik word om die meerderwaardigheid van 'n spesifieke tegniek te probeer bewys nie. Dit sou net die kreatiwiteit van skrywers bewys om probleme met indrukwekkende resultate saam te stel. Die skrywers van hierdie artikel meen dus dat die besondere probleem met denkbeeldige data wat gebruik word om tegnieke en konsepte te illustreer, van minder belang is. Die klem moet val op die formulering van die probleem en die interpretasie van die resultate.

Die probleem wat as uitgangspunt geneem is, is Weingartner se probleem 3[5, p. 185] waaraan sekere wysigings aangebring is. Besonderhede word bespreek in Probleem 1. Die probleme is opgelos met behulp van die standaard lineêre heeltal/gemengde heeltal-programmeringspaket APEX.

Vier groepe probleme word beskou waarin die invloed van verskeie parameters geïllustreer word of waar verskillende formulerings gebruik word. Gerieflikheidshalwe word die vier groepe hier opgesom:

- Die invloed van leen- en uitleen-rentekoerse Probleme 1, 2 en 3.
- Die invloed van dividendbeleid Probleme 1, 4 en 5.
- Die effek van langtermynfinansiering Probleme 1, 6 en 7.
- Die invloed van die beperking dat gekose projekte 'n heeltal (nul of 1) moet wees Probleme 3, 4, 8 en 9.

In die bespreking van die groepe probleme word al die probleme eers omskryf. Net die belangrikste oplossings word getoon. Daarna word die hele groep probleme bespreek en die invloed van die onderskeie parameters uitgewys. Die data van Probleem 1 word in Bylaag A getoon.

Die basiese probleem

Probleem 1

Die probleem behels die keuse van die versameling van projekte wat netto terminaalwaarde van die hipotetiese firma onder beskouing sal maksimeer. Daar is 30 moontlike projekte waaruit die beste versameling (kombinasie) van projekte gekies moet word. Die tydperk onder beskouing is 21 jaar.

Die koste van kapitaal styg soos meer geleen word. In elke jaar kan R200 geleen word vir 'n periode van een jaar teen 'n rentekoers van 10% per jaar, nog R200 teen 'n rentekoers van 12% per jaar en 'n onbeperkte hoeveelheid kan geleen word teen 14% per jaar. Hierdie lenings is altyd hernubaar. Die beperking word ingesluit met behulp van vergelyking (4.3). Kontant kan ook elke jaar uitgeleen word vir periodes van een jaar teen 6% per jaar.

'n Ander beperking wat beskou word is die likwiditeitsbeperking, soos geformuleer met behulp van vergelyking (4.9). Geen kontantbalans-beperking word egter ingesluit nie.

'n Aantal wedersyds-uitsluitende en onderling afhanklike projekte word ook ingesluit by hierdie basiese probleem. Meer besonderhede verskyn hier onder. Multi-begroting en nie-negatiewe veranderlike beperkings is met verwysing na vergelykings (4.12) en (4.14) respektiewelik geformuleer.

Die doelfunksie is geformuleer na aanleiding van vergelyking (4.15). Die kontantbalans en multi-begroting terme word nagelaat omdat hierdie twee aspekte in die basiese probleme buite rekening gelaat word.

Die probleem wat hier beskou word, is Weingartner se probleem 3[5, p. 185] waaraan die volgende wysigings aangebring is:

- Die uitleenkoers van kontant is as 6% geneem (in vergelyking met 10% in Weingartner se probleem)
- Projekte 2, 3 en 16 is as wedersyds-uitsluitend beskou (dit is, $x_2 + x_3 + x_{16} \leq 1$)
- Projek 8 is as onderling afhanklik van projek 18 beskou (dit is, $x_8 - x_{18} \leq 0$)

Die data in hierdie probleem verskyn volledig in Bylaag A. Die opgesomde resultate verskyn in Tabel 1.

Die optimale oplossing wat in Tabel 1 verskyn, toon dat twaalf projekte, nl. projekte 2, 4 tot 7, 9, 10, 14, 15, 21, 23 en 24 gekies moet word. Al hierdie projekte het positiewe netto terminaalwaardes soos gegee deur die duaalveranderlikes μ_j^*. Hierdie resultaat is in ooreenstemming met die interpretasie gegee vir die duaalveranderlike μ_j^* in 2.9. Die rangorde van die projekte word ook aangetoon. Projek 1 het die hoogste posisie in die rangorde omdat dit die hoogste netto terminaalwaarde het.

Volgens die bespreking van die korttermynleenbeperking-duaalveranderlike hierbo, en Tabel 1, sal die netto terminaalwaarde van die hipotetiese firma onder beskouing met R0,074 styg as die bedrag wat teen 10% geleen word in jaar 1 van R200 tot R201 verhoog word. Hierdie is die waarde van die duaalveranderlike $\beta^*_{1,1}$. Die simbool $\beta^*_{1,1}$ verwys na die duaalwaarde van die leenbeperking op rentekoers trap 1 in jaar 1. Omdat hierdie waarde van $\beta^*_{1,1}$ so laag is, nl. R0,074, is dit duidelik dat dit nie die moeite werd is om die leenbeperking van R200 vir die bedrag wat teen 10% per jaar in periode 1 geleen kan word, te probeer verhoog nie.

Die duaalveranderlikes $\beta^*_{2,1}$ en $\beta^*_{2,4}$ is nul omdat die bedrag van R200 wat teen 12% geleen kan word, nie ten volle gebruik is nie. Net R50 en R14,93 van die R200 wat in die eerste en vierde jaar respektiewelik teen 12% geleen kan word, is gebruik.

In die bespreking oor die gebruik en beperkings van duaalveranderlikes is gemeld dat die verdiskonteerkoers gegee word deur die verhouding $[(\rho_t^* / \rho_t^* + 1) - 1]$. Die verdiskonteerkoers word ook in Tabel 1 aangegee en dit blyk dat die verdiskonteerkoers gelyk is aan die hoogste toepaslike marginale leenkoers of uitleenkoers. Meer spesifiek, in periodes 5 tot 21 word geen geld geleen nie; geld word net uitgeleen teen 6% per jaar. Daarom is die verdiskonteerkoers in hierdie periodes 6% (0,06 per eenheid). Hierteenoor word die bedrae wat geleen kan word, teen 10% per jaar en 12% in elk van periodes 2 en 3 ten volle benut en addisionele fondse moet teen 14% per jaar geleen word. Die verdiskonteerkoers in periodes 2 en 3 is dus 14%. In periodes 1 en 4 is die bedrae van R200 wat in elke periode teen 10% per jaar geleen kan word ten volle benut. Addisionele fondse word teen 12% per jaar geleen maar niks word teen 14% per jaar geleen nie. Die verdiskonteerkoers in periodes 1 en 4 is dus 12%.

Uit Tabel 1 blyk dit dat in enige jaar geld net uitgeleen of geleen word. Geld word net in die eerste vier jaar geleen. In die verdere periodes is daar nie genoeg aantreklike projekte om die kontant beskikbaar binne die onderneming te gebruik nie. Omdat dit meer winsgewend is om geld teen 6% uit te leen, word dit dan gedoen. Hieruit moet nie afgelei word dat net projekte wat in die eerste vier jaar 'n aanvang neem, gekies is nie. Gekose projek 7 neem in jaar 7 'n aanvang, gekose projek 21 in jaar 12 en gekose projek 24 in jaar 10. In hierdie later jare word daar soveel kontant binne die onderneming ontwikkel dat die projekte wat winsgewend is, deur intern-ontwikkelde fondse gefinansier kan word.

Probleme wat die invloed van leen- en uitleen-rentekoerse illustreer

Twee addisionele probleme is vir hierdie doel opgelos. Die probleme is:

Probleem 2 – Behalwe vir die uitleenkoers wat van 6 tot 4% per jaar verminder is, is die probleem dieselfde as Probleem 1.

Tabel 1 Opgesomde resultate van die basiese probleem

Projek	Breukdeel aanvraag	μ_j^*	Rangorde	Jaar	Bedrag uitgeleen	Korttermyn fondse (Rand) geleen teen rentekoers van: 10%	12%	14%	Marginale waarde	Verdiskonteer-koers
	x_j^*	Rand			Rand	Rand β_{it}^*	Rand β_{it}^*	Rand β_{it}^*	ρ_t^*	
2	1.0	37.21	7	1		200.0 = .074	50.0 = .000		−4.14	.12
4	1.0	33.81	8	2		200.0 = .130	200.0 = .065	131.00 = .000	−3.70	.14
5	1.0	50.58	5	3		200.0 = .114	200.0 = .057	361.30 = .000	−3.24	.14
6	1.0	216.48	2	4		200.0 = .051	14.93 = .000		−2.85	.12
7	1.0	51.28	4	5	357.28				−2.54	.06
9	1.0	100.43	3	6	940.72				−2.40	.06
10	1.0	4.46	12	7	1405.20				−2.26	.06
14	1.0	20.58	9	8	1926.50				−2.13	.06
15	1.0	436.82	1	9	2417.10				−2.01	.06
21	1.0	19.16	10	10	2800.10				−1.90	.06
23	1.0	47.21	6	11	3196.10				−1.79	.06
24	1.0	7.53	11	12	3446.80				−1.69	.06
1		−3.50	16	13	3754.60				−1.59	.06
3		0.00	14	14	3960.90				−1.50	.06
8		0.00	14	15	4236.60				−1.42	.06
11		−91.04	23	16	4477.80				−1.34	.06
12		−23.92	20	17	4663.46				−1.26	.06
13		−47.74	22	18	4804.27				−1.19	.06
16		−13.47	19	19	4916.52				−1.12	.06
17		−2.18	15	20	4985.52				−1.06	.06
18		−139.20	26	21	4985.65				−1.00	
19		−109.40	24							
20		−181.30	28							
22		−45.43	21							
25		−7.31	17							
26		−148.80	27							
27		−10.87	18							
28		−250.50	29							
29		−264.30	30							
30		−138.80	25							

Probleem 1
Waarde van doelfunksie 5 313.3

Opmerkings – Wanneer projekte dieselfde netto terminaalwaardes het, word dieselfde rangorde aan al die projekte toegewys. Die rangorde wat gebruik word, is die laagste rangorde wat een van hierdie projekte sou hê indien verskillende nommers in volgorde aan hulle toegeken sou word.
– Die verdiskonteerkoers word getoon as per eenheid waarde.

Probleem 3 – Behalwe vir die uitleenkoers wat van 6 tot 7% per jaar verhoog is, is die probleem dieselfde as Probleem 1. Die uitleen rentekoers is verlaag van 6% tot 4% in Probleem 2. Die uitleen van geld word dus relatief minder winsgewend en gevolglik word dit meer winsgewend om addisionele projekte te aanvaar. Daarom word projekte 13, 17 en 14 ook in hierdie probleem aanvaar. Omdat die hipotetiese onderneming onder beskouing so 'n groot deel van sy wins verkry uit die uitleen van groot bedrae (sien Tabel 1) word sy netto terminaalwaarde (NTW) drasties verminder van R5 313,3 tot R4 033,03 wanneer die uitleenrentekoers aansienlik verlaag word.

Let ook op dat die rangorde van die aanvaarde projekte aansienlik verskil tussen Probleme 1 en 2. Die eerste drie projekte in die rangorde verander nie. Die rangorde van die ander gekose projekte verskil betekenisvol. Die rede hiervoor is dat die belangrikheid van die rente verkry vanaf projekte wat in die vroeër jare relatief baie kontant ontwikkel, minder belangrik is indien die uitleenrentekoers laer is, want die firma hier onder beskouing verkry 'n baie groot deel van sy inkomste in die latere jare as rente op die kontant uitgeleen.

In Probleem 3 is die uitleenkoers verhoog van 6% tot 7% per jaar. In vergelyking met Probleem 1 word minder projekte aanvaar omdat dit nou meer winsgewend is om die geld teen die hoër rentekoers uit te leen. Die netto terminaalwaarde (NTW) styg ook omdat inkomste verkry as rente so 'n belangrike komponent van die totale inkomste is.

In Probleem 3 word die aanvaarding van 'n breukdeelprojek die eerste keer teëgekom. Uit die resultate, (43, Tabel 6.3) blyk dit dat 0,801 van projek 14 aanvaar moet word. In Probleem 3 is projek 14 ook die aanvaarde projek wat laaste in die rangorde verskyn. Projek 14 word nie ten volle aanvaar nie weens die groot kontantuitvloei wat dit in jaar 3 veroorsaak. Hierdie feit blyk uit Tabel A.1 in Bylaag A. Die waarde (μ_j^*) van projek 14 is nul. Dus kan hierdie projek aanvaar word of afgewys word sonder om die netto terminaalwaarde (NTW) van die firma te beïnvloed. Jaar 3 is ook die jaar waarin die meeste geleen word. Uit die komperresultate blyk dit dat in jaar 3 R200 geleen word teen 10%, R200 teen 12% en R195,22 teen 14%. 'n Groter bedrag word nie teen 14% geleen nie omdat dit nie die NTW van die onderneming sal verhoog nie. Gevolglik is kontant ook nie beskikbaar om projek 14 ten volle te aanvaar nie.

Samevattend kan dit gesê word dat beide die leen- en die uitleen-rentekoers die keuse van projekte sterk beïnvloed. Die invloed is veral belangrik as die patroon van kontant in- en uitvloeie tussen verskillende projekte in dieselfde periode

Tabel 2 Die invloed van leen- en uitleen-rentekoerse op die projekte gekies en op die rangordes

Projek	Probleem 1	Probleem 2	Probleem 3	IOK Rangorde
1	—	—	—	9
2	7	11	7	2
4	8	6	8	13
5	5	8	4	5
6	2	2	2	8
7	4	5	6	3
9	3	3	3	3
10	12	10	—	16
13	—	15	—	19
14	9	4	11*	18
15	1	1	1	10
17	—	12	—	22
21	10	9	9	14
23	6	7	5	6
24	11	13	10	12
25	—	14	—	28
NTW	5 313,3	4 033,03	6 108,76	

Opmerkings:
- IOK beteken interne opbrengskoers ('IRR). Hierdie waardes is verkry uit Tabel A.4 van Bylaag A.
- NTW is die netto terminaalwaarde van hierdie hipotetiese onderneming wat beskou word.
- *Dui breukdeel-projekte aan. Al die ander aanvaarde projekte is heeltemal aanvaar ($x_j^* = 1$).

en/of vir dieselfde projek tussen verskillende periodes baie wissel.

Probleme wat die invloed van dividendbeleid illustreer

Twee addisionele probleme is vir hierdie doel opgelos. Die probleme is:

Probleem 4 – Die basiese probleem is beskou maar die addisionele beperking is bygevoeg dat 'n konstante dividenduitbetaling van R100 in elke jaar gemaak moet word.

Probleem 5 – Die basiese probleem is beskou maar die addisionele beperking is bygevoeg dat in jaar 1 'n dividend van R100 betaal moet word en dat hierdie dividend teen 5% per jaar moet groei.

In Tabel 3 word die gekose projekte en hul rangorde in Probleme 1, 4 en 5 vergelyk.

Tabel 3 Die invloed van dividendbeleid op die projekte gekies en op die rangorde

Projek	Probleem 1	Probleem 4	Probleem 5
2	7	10	10
4	8	7	7
5	5	5	5
6	2	2	2
7	4	4	4
9	3	3	3
10	12	—	—
14	9	11*	11*
15	1	1	1
21	10	8	8
23	6	6	6
24	11	9	9
NTW	5 313,3	1 082,4	−1 133,1

*Breukdeel-projekte.

Tabel 3 toon duidelik hoe belangrik die dividendbeleid van 'n onderneming kan wees. Die netto terminaalwaarde (NTW) van die firma word in hierdie geval vinnig laer soos die dividendbeleid hoër dividendbetalings voorskryf.

In Probleem 5 is die NTW selfs negatief. Dit is duidelik dat die dividendbeleid voorgestel in Probleem 5 tot die ondergang van die firma sal lei. Die volledige resultate, wat nie getoon word nie, wys dat die voorgestelde dividendbeleid net uitgevoer kan word deur groot bedrae geld te leen ten einde dividende te kan betaal. Hierdie voorbeeld is dus heeltemal onrealisties en onprakties.

In die algemene model wat voorgestel is in Deel 1, 4.5.2. word voorsiening gemaak vir 'n beperking wat sal verseker dat die netto terminaalwaarde nooit negatief word soos bevind word in Probleem 5 nie. Indien 'n beperking dat die NTW van Probleem 5 groter of gelyk aan nul moet wees bygevoeg word, dan kan die rekenaar-program nie 'n oplossing kry nie. Die rede is dat die nie-negatiewe NTW beperking en die maksimering van die NTW in hierdie geval nie versoenbaar is nie.

Probleme wat die invloed van die gebruik van langtermyn finansiering illustreer

Twee addisionele probleme is vir hierdie doel opgelos. Die probleme is:

Probleem 6 – Die geval wat hier beskou word, is die basiese probleem wat uitgebrei word sodat beleggings gemaak gedurende die eerste en derde jare òf gefinansieer kan word deur lenings van een jaar, òf deur 4-jaar (langtermyn) lenings. Die hoofsom plus al die rente word aan die einde van die 4-jaar leentydperk terugbetaal. In elk van jare 1 en 3 kan R200 geleen word teen 9% per jaar, nog R200 teen 11% per jaar en 'n onbeperkte hoeveelheid geld kan geleen word teen 13% per jaar. Die ooreenstemmende koerse vir die een-jaar lenings is 10%, 12% en 14% per jaar. Die maksimum bedrag wat op die korttermyn geleen kan word teen die verskillende rentekoerse is dieselfde as vir die 4-jaar lenings. 'n Opsomming van die resultate verskyn in Tabel 4.

Probleem 7 – Die basiese probleem, Probleem 1, is uitgebrei sodat beleggings gemaak gedurende die eerste en derde jare ook gefinansier kan word òf deur een-jaar lenings òf deur vier-jaar lenings. Die eerste R200 kan geleen word teen 9% per jaar, nog R200 teen 11% per jaar en 'n onbeperkte hoeveelheid teen 13% per jaar. Die rente is aan die einde van elke jaar betaalbaar en die hoofsom word aan die einde van die vierde jaar terugbetaal.

In Tabel 5 word die gekose projekte en die rangorde van die projekte in Probleme 1, 6 en 7 aangetoon.

Uit Tabel 5 blyk dat meer projekte aanvaar kan word en daardie netto terminaalwaarde van die firma hoër is. Die verklaring is dat langtermynlenings, wat teen 'n laer rentekoers beskikbaar is, die effektiewe rentekoers laer maak. Meer geld kan gevolglik geleen word wat nogtans winsgewend in projekte belê kan word.

Probleme met die invloed van die beperking dat gekose projekte en die multibegroting veranderlikes heeltalle (Nul of 1) moet wees

Twee addisionele probleme is met gemengde heeltal programmering opgelos vir hierdie doel. Al die vorige probleme in hierdie artikel is met lineêre programmering opgelos. Die probleme is:

Tabel 4 Die basiese probleem uitgebrei sodat langtermyn finansiering gebruik kan word. Die hoofsom plus rente is alles terugbetaalbaar aan die einde van die langtermyn leentydperk

Projek	Breukdeel aanvaar	μ_j^*	Rangorde	Jaar	Bedrag uitgeleen	Korttermyn fondse (Rand) geleen teen rentekoers van: 10%	12%	14%	Marginale waarde	Verdiskonteerkoers	Langtermyn fondse geleen teen rentekoers van: 9%	11%
	x_j^*	Rand			Rand	Rand β_u^*	Rand β_u^*	Rand β_u^*	ρ_t^*		Rand β_u^*	Rand β_u^*
1	1.000	13.85	12	1		200.00 = .069	100.00 = .000		−3.85	.12	200.0 = .263	
2	1.000	0.00	14	2		200.00 = .061	42.00 = .000		−3.44	.12	200.0 = .245	200.0 = .006
4	1.000	54.97	7	3		200.00 = .108	200.00 = .054	90.04 = .000	−3.07	.14		
5	1.000	93.44	5	4	174.35				−2.69	.06		
6	1.000	259.96	2	5	575.41				−2.54	.06		
7	1.000	51.28	8	6	1245.90				−2.40	.06		
9	1.000	117.47	3	7	1210.60				−2.26	.06		
10	1.000	24.68	9	8	1780.30				−2.13	.06		
13	1.000	19.20	10	9	2314.10				−2.01	.06		
14	1.000	83.84	6	10	2738.00				−1.90	.06		
15	1.000	520.65	1	11	3171.20				−1.79	.06		
21	1.000	19.16	11	12	3446.50				−1.69	.06		
23	1.000	115.59	4	13	3787.30				−1.59	.06		
24	1.000	7.53	13	14	4025.60				−1.50	.06		
3		−34.92	21	15	4330.10				−1.42	.06		
8		0.00	15	16	4593.90				−1.34	.06		
11		−59.16	22	17	4795.50				−1.26	.06		
12		−5.62	17	18	4944.30				−1.19	.06		
16		−68.67	24	19	5064.90				−1.12	.06		
17		−2.18	16	20	5142.80				−1.06	.06		
18		−92.15	25	21	5152.40				−1.00			
19		−67.34	23									
20		−138.60	28									
22		−29.89	20									
25		−7.31	18									
26		−133.40	27									
27		−10.87	19									
28		−179.40	29									
29		−209.40	30									
30		−109.50	26									

Probleem 6

Waarde van doelfunksie 5 480.1

Probleem 8 – Probleem 3 is hier opgelos as 'n gemengde heeltal-programmeringsprobleem. Die waardes van die besluitnemingsveranderlikes x_j is beperk tot nul of 1.

Probleem 9 – Probleem 4 is hier opgelos as 'n gemengde heeltal-programmeringsprobleem. Die waardes van die besluitnemingsveranderlikes x_j is beperk tot nul of 1.

In Tabel 6 word die breukdeel van die gekose projekte aanvaar en die rangorde vir Probleme 3 en 8, en dan 4 en 9, vergelyk.

In Afdeling 3 is die probleem onder die leser se aandag gebring in verband met die 'opwaartse ronding' of 'afwaartse ronding' van breukdeel-projekte wat volgens die lineêre programmering-formulering se optimale oplossing aanvaar moet word.

Weingartner (5, p. 148) het aanbeveel dat sommige breukdeel-projekte as geheel aanvaar moet word, en die (ander) oorblywende breukdeel-projekte glad nie aanvaar

Tabel 5 Die invloed van die gebruik van langtermyn finansiering op die projekte gekies en op die rangordes

Projek	Probleem 1	Probleem 6	Probleem 7
1	—	12	12
2	7	14	9
4	8	7	7
5	5	5	5
6	2	2	2
7	4	8	8
9	3	3	3
10	12	9	11
13	—	10	14*
14	9	6	6
15	1	1	1
21	10	11	10
23	6	4	4
24	11	13	13
NTW	5 313,3	5 480,1	5 409,0

*Dui breukdeel-projekte aan.

Tabel 6 Die invloed van die beperking dat gekose projekte en die multi-begroting veranderlikes heeltalle moet wees

Projek	Probleem 3	Probleem 8	Probleem 4	Probleem 9
2	7	10	10	11
4	8	7	7	7
5	4	4	5	5
6	2	2	2	2
7	6	6	4	4
9	3	3	3	3
10	—	—	—	10
14	11*[a]	11	11*[b]	—
15	1	1	1	1
21	9	8	8	8
23	5	5	6	6
24	10	9	9	9
NTW	6 108,7	6 108,2	1 082,4	1 078,68

*Dui breukdeel-projekte aan.

[a]Projek 14 word 0,801 aanvaar in Probleem 3.

[b]Projek 14 word 0,403 aanvaar in Probleem 4.

moet word nie. Volgens Tabel 6 geld dit vir die geval van Probleme 3 en 8. Vir die ander geval geld dit egter nie.

Dit is nie moontlik om vanaf die lineêre programmering-oplossing ''n benadering te maak' wat die werklike optimale oplossing sal verskaf nie. Die enigste oplossing wat die optimale oplossing vir die evaluasie van kapitaalbeleggings sal verskaf, is die heeltal- of gemengde heeltal programmeringsformulering.

Uit Tabel 6 blyk dit ook dat die optimum waarde van die gemengde heeltal-programmeringsformulering altyd laer is as die ooreenstemmende waarde van die lineêre programmeringsoplossing. Hierdie resultaat is te verwagte want eersgenoemde metode plaas strenger beperkings op die waardes wat die besluitneming-veranderlikes kan aanneem. Soos teoreties bewys kan word, het meer beperkings altyd 'n laer optimum waarde tot gevolg.

Slot

Die doel van hierdie artikel was om die interpretasie, gebruik en beperkings van duaalveranderlikes te bespreek. In die vorige artikel is duaalveranderlikes geïdentifiseer en die interpretasie daarvan is nou bespreek. Daar is ook aan die hand van numeriese voorbeelde aangetoon hoe hierdie modelle met behulp van 'n rekenaar gebruik kan word.

Die skrywers vertrou dat die leser se belangstelling verder geprikkel is en dat pogings aangewend sal word om die teorie van vandag die praktyk van môre te maak.

Verwysings

1 CONRADIE, F. H. D. & VAN DEN BERG, P. H. 1978. Lineêre programmerings- en gemengde heeltal-programmeringsmodelle vir die evaluasie van kapitaalbelegging in 'n onderneming met net een afdeling. Deel I. *Bedryfsl.* 9(4): 7.

2 DAELLENBACH, H. G. & BELL, E. J. 1970. User's Guide to Linear Programming. Prentice-Hall.

3 BAUMOL, W. J. 1972. Economic Theory and Operations Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

4 SALKIN, G. & KORNBLUTH, J. 1973. Linear Programming in Financial Planning. Accountancy Age Books, London.

5 WEINGARTNER, H. M. 1963. Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

6 HUGHES, J. S. & LLEWELLEN, W. G. 1974. Programming Solutions to Capital Rationing Problems. *J. Bus. Fin. Account.* 1(1): 55–74.

Bylaag A

Data gebruik in die basiese probleem: Probleem 1.

Die data gebruik in die basiese probleem word hier genoteer sodat die leser, indien so verkies, die resultate nog meer volledig kan interpreteer. 'n Verdere rede is om die kontrolering van die probleme wat hier opgelos is, moontlik te maak.

Tabelle A.1 tot A.4 is direk oorgeskryf uit Weingartner se boek (5, p. 180–181). Die data wat in Tabelle A.1 tot A.3 verskyn, is gebruik om die probleem te formuleer.

Tabel A.1 Kontantvloeie geassosieer met 30 hipotetiese investeringsprojekte

Projek-	Vloei in jaar																								
nommer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	−100	20	20	20	19	19	18	16	14	11	6	−8														
2	−100	20	18	18	18	18	14	14	14	14	14	10	10	10	10	10	6	6	6	6	6					
3	−100	15	15	15	15	15	13	13	13	13	13	11	11	11	11	11	9	9	9	9	9					
4	−100	20	6	11	7	10	5	14	18	2	20	2	22	8	10	18	6	9	14	24						
5	−100	−60	−60	80	74	66	55	44	30	14																
6	−200	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
7							−80	20	20	20	19	17	14	10	6	2										
8									−60	−30	−10	45	34	25	16	12	8	−20	21	16	12	9	7	5	2	
9			−120	25	25	30	35	30	25	20	15	10	5													
10		−100	18	17	15	12	8	−10	18	17	15	12	8	−10	18	17	15	12	8							
11	−150	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20														
12	−100	20	18	16	14	12	10	4	−20	20	18	16	14	12	10	4										
13	−150	−75	−75	60	60	55	50	44	38	36	35	34	33	30	25	17	9									
14	−50	−100	−175	50	55	60	65	60	50	40	30	20	10	−25	50	41	35	25	15	5						
15	−100	−150	−100	10	20	30	40	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
16								−95	−60	47	42	37	31	24	18	13	9	6	4	3						
17										−175	50	45	35	25	10	−60	45	35	25	10						
18	−250	45	45	40	30	25	20	15	10	−40	40	32	25	19	14	10	7	5								
19	−75	−75	−40	40	40	40	35	35	30	25	15	5														
20	−180	20	12	16	13	11	19	17	12	15	19	13	14	17	20	14	11	15	17	12						
21												−80	18	16	14	12	10	4	16	14	10	6				
22		−85	20	20	16	15	13	10	7	3																
23		−270	−100	125	115	105	80	60	35	25	15	10														
24										−40	15	13	9	7	5	2										
25								−50	10	10	9	7	4	−14	9	9	8	6	3	−16	8	8	4			
26		−200	60	40	30	15	−25	−25	50	40	30	20	10													
27											−70	15	13	11	10	9	7	6	4	3	2					
28		−355	60	70	80	70	55	40	25	15	5															
29	−275	40	45	45	40	35	30	25	20	15	−75	35	30	25	20	15	10	5								
30	−140	20	20	18	16	14	11	8	−25	18	18	16	13	10	6	−25	16	16	14	11	8	5	2			

Tabel A.2 Horison-waardes van moontlike projekte

Projeknommer	6	8	15	21	25	30
Horison-waarde (10%)	94.77	20.47	227.45	5.45	10.50	6.20
Horison-waarde (5%)	108.24	21.71	259.77	5.71	11.25	6.58

Bogenoemde waardes is bereken vir beide 10% en 5% verdiskonteerkoerse.

Tabel A.3 Kontant ontwikkel intern tot die onderneming

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Bedrag R	400	36	320	280	240	200	160	120	80	40	0

Jaar	12	13	14	15	15	17	18	19	20	21
Bedrag	−40	−80	−120	−160	−200	−240	−280	−320	−360	−400

Tabel A.4 Interne opbrengskoerse van die moontlike projekte

Projeknommer	1	2	3	4	5	6	7	8
Koers (%)	11.03	13.94	11.90	10.02	12.26	11.75	13.84	12.57
Rang	9	2	7	13	5	8	3	4

Projeknommer	9	10	11	12	13	14	15	16
Koers (%)	15.66	9.07	7.00	8.55	8.76	9.22	10.80	10.24
Rang	1	16	19	18	17	15	10	11

Projeknommer	17	18	19	20	21	22	23	24
Koers (%)	5.81	5.76	6.75	5.19	9.35	6.11	11.94	10.19
Rang	22	23	20	24	14	21	6	12

Projeknommer	25	26	27	28	29	30
Koers (%)	4.52	4.25	3.50	4.71	4.64	4.93
Rang	28	29	30	26	27	25