Die interne rendement en meervoudige opbrengste

W.G. Klerck

Skool vir Bedryfsleiding, Universiteit van Suid-Afrika, Pretoria

The internal rate of return and multiple solutions. It is often stated that one of the problems that occurs when using the internal rate of return in capital budgeting is that the method can generate multiple rates or solutions. In this article the problem of multiple rates is analysed, using the approach adopted by J.C.T. Mao in his book *Quantitative Analysis of Financial Decisions*. In order to implement Mao's approach a computer program was written in Apple Basic. The use of the program is illustrated with a few examples.

S. Afr. J. Bus. Mgmt. 1983, 14: 96 – 101

Wanneer die IRR in kapitaalbegroting gebruik word, word daar soms meer as een opbrengskoers vir 'n gegewe projek verkry. Hierdie probleem ontstaan as gevolg van die foutiewe aanname wat gemaak word naamlik dat die IRR van 'n projek onafhanklik is van die koste van kapitaal.

Ten einde die probleem te oorbrug is beleggings na aanleiding van Mao geklassifiseer as suiwer of gemeng. Slegs in die geval van suiwer beleggings is die betrokke aanname geldig en kan die IRR soos gewoonlik bereken word. Vir gemengde beleggings is die IRR afhanklik van die koste van kapitaal en moet 'n ander benadering gevolg word om die IRR te bereken. Die metode wat gevolg moet word is in die artikel bespreek en is 'n rekenaarprogram in Apple Basic geskryf wat die metode implementeer.

S.-Afr. Tydskr. Bedryfsl. 1983, 14: 96 – 101

Inleiding

Die gebruik van die internerentabiliteitsmetode (IRR) in kapitaalbegroting is algemeen bekend. Dit is ook bekend dat een van die tekortkominge van hierdie metode die feit is dat onder sekere omstandighede dié metode meer as een opbrengskoers vir 'n gegewe projek lewer. Weston en Brigham¹, Brealey en Myers², asook Jones³ in 'n onlangse publikasie maak melding van hierdie probleem. Daar word egter nie aangetoon hoe die probleem oorbrug kan word nie. Wat oënskynlik minder bekend is, is die benadering wat Mao⁴ volg om dié probleem op te los. In hierdie artikel sal die benadering van Mao bespreek word en sal 'n rekenaarprogram (geskryf in Appel Basic) verskaf word wat Mao se benadering implementeer. Die gebruik van die program aan die hand van enkele voorbeelde sal ook geïllustreer word.

Die IRR word gedefinieer as daardie opbrengskoers wat die huidige waarde van 'n projek gelykstel aan nul. Indien A_t die netto kontantvloei aan die einde van jaar t is, dan word die IRR (r^*) van die projek met 'n lewensduur van n jaar gegee deur die uitdrukking:

$$\sum_{t=0}^n \frac{A_t}{(1 + r^*)^t} = 0$$

Indien albei kante van bogenoemde vergelyking met $(1 + r^*)^n$ vermenigvuldig word, reduceer die vergelyking na

$$\sum_{t=0}^n A_t(1 + r^*)^{n-t} = 0$$

Hierdie is 'n polinoom van graad n en die wyse waarop die wortel van die polinoom (die waarde van r^*) bereken kan word, sal later in die artikel uiteengesit word.

Die tipiese belegging bestaan gewoonlik uit aanvanklike uitgawes wat aanleiding gee tot toekomstige inkomstes. Figuur 1 is 'n grafiese voorstelling van 'n tipiese belegging.

Figuur 1 Kontantvloei vir 'n tipiese belegging

W.G. Klerck

Mede-Professor, Skool vir Bedryfsleiding,
Universiteit van Suid-Afrika, Posbus 392, Pretoria 0001,
Republiek van Suid-Afrika

Aanvaar Mei 1983

In dié tipe belegging is die aanvanklike kontantvloeï (A_0) negatief en die latere kontantvloeï (A_1, A_2, A_3) positief. Vir sulke tipe beleggings (bekend as konvensionele beleggings) is daar 'n unieke waarde vir r^* (sien bv. Johnson³).

Beleggings met kontantstrome soos aangetoon in Figuur 2 mag egter meer as een waarde van r^* tot gevolg hê; met ander woorde sulke beleggings kan meervoudige opbrengste lewer. Hierdie tipe beleggings staan bekend as nie-konvensionele beleggings.

Figuur 2 Nie-konvensionele kontantstrome

In konvensionele beleggings word die berekening van die IRR nie beïnvloed deur die koste van kapitaal nie; dit is onafhanklik van die koste van kapitaal en dus intern tot die projek. Vandaar die benaming interne rendement. In die geval van nie-konvensionele beleggings is die 'interne rendement' nie noodwendig onafhanklik van die koste van kapitaal nie. Om hierdie aspek te verduidelik is dit nodig om die volgende konsepte eers te bespreek:

- Projekbalans van 'n belegging
- Suiwer- en gemengde beleggings

Die projekbalans van 'n belegging

Beskou 'n belegging wat 'n kontantstroom van A_t aan die einde van jaar t tot gevolg het. ($t = 0, 1, 2, \dots, n$). Indien die opbrengskoers i is, is die waarde van die projek aan die einde van jaar

$$S_t(i) = A_0(1+i)^t + A_1(1+i)^{t-1} + \dots + A_t$$

$$0 \leq t \leq n$$

$S_t(i)$ staan bekend as die projekbalans van 'n belegging. Die projekbalans aan die einde van 'n projek se lewensduur word gegee deur die uitdrukking:

$$S_n(i) = A_0(1+i)^n + A_1(1+i)^{n-1} + \dots + A_n$$

en is die toekomstige waarde van die projek. Die projekbalans kan op enige tydstop bepaal word terwyl die toekomstige waarde slegs verwys na die waarde aan die einde van 'n projek se lewensduur.

Die projekbalans van 'n belegging het 'n ekonomiese betekenis. Beskou weereens 'n belegging met kontantstrome van $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$. Veronderstel $A_0 < 0$ en dat die orige A 's positief of negatief kan wees. Behalwe wanneer $t = 0$ kan die projekbalanse negatief, positief of nul wees. Indien i die algehele opbrengs van die projek is, dan impliseer 'n negatiewe $S_t(i)$ dat die opbrengs verkry tot en met tydstop t minder is as die algehele opbrengs i . Die onderneming het dus tot en met tydstop t nie al die kontant gebruik wat dit te wagte is nie. 'n Positiewe $S_t(i)$ beteken dat op tydstop t die opbrengs hoër is as i en dat die onderneming op daar-

die stadium meer kontant onttrek of gebruik het as wat dit in totaal gaan ontvang. Met ander woorde in die daaropvolgende jaar ($t + 1$) het die onderneming 'n oortrokke rekening van $S_t(i)$ rand. Wanneer $S_t(i)$ gelyk is aan nul is die opbrengs ontvang op tydstop t gelykstaande aan i .

Suiwer en gemengde beleggings

'n Suiwer belegging is een waarvoor die projekbalanse, bereken teen die IRR altyd nul of negatief is. Die belegging is 'suiwer' aangesien die onderneming nooit meer kontant onttrek as wat dit gaan ontvang nie. 'n Belegging is dus suiwer as $S_t(r^*) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$, waar r^* die interne rendement van die projek is.

'n Gemengde belegging daarenteen is een waarvoor $S_t(r^*) > 0$ vir sommige waardes van t en $S_t(r^*) < 0$ vir die orige waardes van t .

Dié onderskeid is gemaak om aan te toon dat slegs in die geval van suiwer beleggings die opbrengskoers onafhanklik is van die koste van kapitaal. Met ander woorde vir suiwer beleggings is die opbrengskoers intern tot die projek.

Die opbrengskoers van gemengde beleggings daarenteen is nie onafhanklik van die koste van kapitaal nie. Op sekere tydstoppe (wanneer $S_t(r^*) > 0$) het die onderneming 'n oortrokke rekening teen die projek en sal die opbrengskoers gevolglik beïnvloed word deur die koste van kapitaal. In so 'n geval sal 'n ander benadering gevolg moet word om die IRR te bereken. Hierdie aspek kan met behulp van 'n voorbeeld geïllustreer word.

Veronderstel die kontantvloeï van 'n belegging is as volg:

$$A_0 = -10$$

$$A_1 = 40$$

$$A_2 = -40.$$

Die interne rendement r^* kan verkry word deur die vergelyking

$$-10 + \frac{40}{1+r^*} - \frac{40}{(1+r^*)^2} = 0$$

op te los. Die waarde van r^* is 100% en indien die koste van kapitaal 10% is behoort die projek aanvaar te word. Die netto huidige waarde van die belegging teen 'n verdisconteringskoers van 10% is egter -6,70.

Indien die belegging dus aanvaar word sal dit die markwaarde van die onderneming verminder.

Hierdie teenstrydigheid kan verklaar word deur daarop te let dat die belegging 'n gemengde belegging is. Die projekbalanse van die belegging is:

$$S_0(100\%) = -10$$

$$S_1(100\%) = 20$$

en gevolglik is dit 'n gemengde belegging. In 'n gemengde belegging is die 'interne' rendement nie onafhanklik van die koste van kapitaal nie en is bogenoemde opbrengskoers van 100% foutief. Indien die koste van kapitaal van 10% in ag geneem word is die 'interne' rendement -63,6. Dié wyse waarop hierdie opbrengskoers bereken is sal later aange-
toon word.

Die identifisering van suiwer en gemengde beleggings

Bogenoemde klassifikasie van projekte gaan van die veronderstelling uit dat die IRR bekend is; met ander woorde indien die IRR bekend is kan 'n belegging as suiwer

of gemeng geklassifiseer word. *A priori* is die IRR nie bekend nie en moet 'n ander metode gevolg word om beleggings as suiwer of gemeng te klassifiseer.

Indien $A_0 < 0$ kan daar gesorg word dat enige belegging aan die vereiste $S_t(i) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ voldoen. Dit word gedoen deur die verdiskonteringskoers i te verhoog totdat $S_t(i) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Veronderstel hierdie verdiskonteringskoers is r min. Dit is belangrik om daarop te let dat r min die kleinste verdiskonteringskoers is waarvoor $S_t(i) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$. In so 'n geval is $S_n(r \text{ min})$ of negatief of nul of positief. Indien $S_n(r \text{ min}) \geq 0$ bestaan daar 'n koers r^* wat groter is as r min en waarvoor $S_n(r^*) = 0$. Wanneer die verdiskonteringskoers verhoog word, word die projekbalanse kleiner. Aangesien $r^* > r$ min en aangesien $S_t(r \text{ min}) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ moet $S_t(r^*) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Wanneer $S_n(r \text{ min}) \geq 0$ het ons dus te doen met 'n suiwer belegging.

As $S_n(r \text{ min}) < 0$ bestaan daar 'n koers $r^* < r$ min wat $S_n(r^*) = 0$ stel. Aangesien r min die kleinste waarde is waarvoor die balanse almal negatief is, volg dit dat wanneer die balanse teen r^* verdiskonteer word almal nie negatief kan wees nie. Met ander woorde wanneer $S_n(r \text{ min}) < 0$ is die belegging 'n gemengde een.

Die waarde van r min word met behulp van 'n iteratiewe proses, geïmplementeer op 'n rekenaar, bepaal.

Die klassifikasie van projekte

Tot dusver is beleggings eers geklassifiseer as konvensioneel of nie-konvensioneel. Daarna is beleggings ook geklassifiseer as suiwer of gemeng. Daar bestaan wel 'n verband tussen hierdie verskillende klassifikasies. Die verband is die volgende:

- 'n konvensionele belegging is altyd ook 'n suiwer belegging.
- 'n suiwer belegging is nie noodwendig konvensioneel nie.
- 'n gemengde belegging is altyd ook 'n nie-konvensionele belegging.

'n Konvensionele belegging ook 'n suiwer belegging

Vir konvensionele beleggings is $A_0 < 0$ ($t = 1, 2, \dots, n$). Indien r^* die IRR is, is $S_n(r^*) = 0$. Veronderstel $S_t(r^*) > 0$ vir een of ander waarde van t tussen 1 en $n-1$. $S_t + 1(r^*)$ kan in terme van $S_t(r^*)$ uitgedruk word:

$$\begin{aligned} S_{t+1}(r^*) &= A_0(1+r^*)^{t+1} + A_1(1+r^*)^t \\ &\quad + \dots + A_{t+1} \\ &= (1+r^*)/A_0(1+r^*)^t + A_1(1+r^*)^{t-1} \\ &\quad + \dots + A_t / + A_{t+1} \\ &= (1+r^*) S_t(r^*) + A_{t+1} \end{aligned}$$

Aangesien $r^* > 0$ en $A_t \geq 0$ vir $t = 1, 2, \dots, n$ sal $S_{t+1}(r^*) > 0$ as $S_t(r^*) > 0$. $S_{t+1}(r^*) > 0$ impliseer dan ook dat $S_{t+2}(r^*) > 0$ en uiteindelik ook $S_n(r^*)$. Dit weerspreek die feit dat $S_n(r^*) = 0$. Geeneen van die balanse van die belegging kan dus positief wees nie en gevolglik is 'n konvensionele belegging altyd 'n suiwer belegging.

Nie-konvensionele suiwer beleggings

Dat 'n suiwer belegging nie noodwendig 'n konvensionele

belegging is nie kan uit die volgende voorbeeld waargeneem word:

Einde van jaar	0	1	2	3	4	5
Kontantvloei	-4 100	1 000	1 000	1 000	-1 000	3 140

Die negatiewe kontantvloei in jaar 4 toon dat die belegging nie-konvensioneel is. Berekenings toon ook dat die IRR van die belegging 7% is. Teen 'n verdiskonteringskoers van 7% is die balanse van die belegging:

$$\begin{aligned} S_0(7\%) &= -4 100 & S_3(7\%) &= -1 808 \\ S_1(7\%) &= -3 387 & S_4(7\%) &= -2 935 \\ S_2(7\%) &= -2 624 & S_5(7\%) &= 0 \end{aligned}$$

Aangesien $S_t(7\%) \leq 0$ vir $t = 0, 1, 2, 3, 4$ is die nie-konvensionele belegging ook 'n suiwer belegging.

'n Gemengde belegging is ook 'n nie-konvensionele belegging

Om aan te toon dat 'n gemengde belegging noodwendig ook 'n nie-konvensionele belegging moet wees is dit slegs nodig om die balanse van die belegging as volg uit te druk:

$$\begin{aligned} S_0(r^*) &= A_0 & A_0 &< 0 \\ S_1(r^*) &= A_0(1+r^*) + A_1 \\ &= S_0(1+r^*) + A_1 \\ S_2(r^*) &= S_1(1+r^*) + A_2 \\ S_n(r^*) &= S_{n-1}(1+r^*) + A_n \end{aligned}$$

'n Gemengde belegging is een waarvoor $S_t(r^*) < 0$ vir sommige waardes van t en $S_t(r^*) > 0$ vir die ander waardes van t . Indien byvoorbeeld $S_t(r^*) > 0$ kan een van die ander balanse $S_k(r^*)$ ($K > t$) slegs negatief wees as die waarde van een van die A_i 's negatief is. Indien A_i negatief is, is die belegging nie-konvensioneel. 'n Gemengde belegging is dus altyd 'n nie-konvensionele belegging.

Die verskillende klassifikasies van die beleggings reduseer nou tot die volgende:

- Konvensionele suiwer beleggings;
- Nie-konvensionele suiwer beleggings;
- Nie-konvensionele gemengde beleggings.

Eersgenoemde twee tipe beleggings se IRR is onafhanklik van die koste van kapitaal terwyl dit nie geld vir die laasgenoemde tipe belegging nie. Die benaming IRR behoort dus nie gebruik te word vir nie-konvensionele gemengde beleggings nie aangesien die opbrengskostes nie intern tot die belegging is nie; dit is afhanklik van die koste van kapitaal. Ter wille van die bestaande gebruik sal die benaming interne rendement egter nog steeds gebruik word.

Die bepaling van die interne rendement vir suiwer beleggings

Die interne rendement vir 'n suiwer belegging word gevind deur daardie waarde r (noem dit r^*) te bepaal wat die uitdrukking

$$S_n(r) = A_0(1+r)^n + A_1(1+r)^{n-1} + \dots + A_n$$

gelyk aan nul stel. 'n Metode wat dikwels gevolg word is om 'n reeks waardes $r_0, r_1, r_2, \dots$, te genereer wat uiteindelik konvergeer tot r^* . Hierdie reeks waardes word bepaal met behulp van die uitdrukking:

$$r_{i+1} = r_i - \frac{S_n(r_i)}{H(r_i)}$$

waar $H(r_i)$ die helling van 'n geskikte lyn is. Die korrekte waarde van $H(r_i)$ is die helling van die lyn wat die punte $(r_i, S_n(r_i))$ en $(r^*, S_n(r^*))$ verbind.

$$\begin{aligned} \text{As } H(r_i) &= \frac{S_n(r_i) - S_n(r^*)}{r_i - r^*} \\ &= \frac{S_n(r_i)}{r_i - r^*} \end{aligned}$$

dan is

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i - \frac{S_n(r_i)}{S_n(r_i)} (r_i - r^*) \\ &= r^* \end{aligned}$$

Aangesien die waarde van r^* onbekend is, is dit nie moontlik om die korrekte helling te bepaal nie. As 'n benadering word die afgeleide van $S_n(r_i)$ gebruik (Sien byvoorbeeld Hildebrand⁵).

Die uitdrukking gebruik om r^* te bepaal reduceer dan na

$$r_{i+1} = r_i - \frac{S_n(r_i)}{S'_n(r_i)} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Om die metode te genereer word 'n willekeurige waarde vir r_0 (gewoonlik tussen 0 en 1) gekies. Die soekproses (om r^* te vind) word beëindig wanneer $S_n(r_i)$ gelyk is aan nul. Dié metode staan bekend as die benadering van Newton-Raphson (sien byvoorbeeld Hildebrand⁵). 'n Eenvoudige voorbeeld sal gebruik word om die metode te illustreer: Gegee die volgende kontantstrome:

Jaar	Kontantstroom
0	-1 000
1	452
2	500
3	278

Indien $r_0 = 0,3$ gestel word, is die waardes van $S_n(r_0)$ en $S'_n(r_0) = 505,1$ en $-3 394,8$ onderskeidelik. Aangesien $S_n(r_0)$ ongelik is aan nul moet die volgende waarde van r , naamlik r_1 , bereken word:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,3 - (-505,1)/(-3 394,8) \\ &= 0,151 \end{aligned}$$

Hierdie proses word voortgesit totdat $S_n(r)$ gelyk is aan nul. Vir die genoemde voorbeeld is die stappe:

Iterasie	r	S_n	S'_n
1	0,3	-505,1	-3 394,8
2	0,151	-73,0	-2 435,1
3	0,121	-2,7	-2 257,9
4	0,120	0	

Die IRR van bogenoemde voorbeeld is dus 12%.

Die bepaling van die interne rendement vir gemengde beleggings

Gemengde beleggings het die eienskap dat gedurende sekere periodes die onderneming minder fondse onttrek het aan die projek as wat dit in totaal gaan ontvang. Gedurende ander periodes het dit weer meer fondse onttrek. Wanneer

minder fondse onttrek is (projekbalans van die belegging is negatief) moet die balanse van die projek verdiskonteer word teen die interne rendement. Wanneer meer fondse onttrek is (projekbalans van die belegging is positief) moet die balanse van die projek verdiskonteer word teen die koste van kapitaal.

Omdat die projekbalanse van die belegging verdiskonteer word teen r en K , is die toekomstige waarde $S_n(r, K)$ van die projek 'n funksie van r en K . Aangesien die projek aan die einde van jaar n eindig, is $S_n(r, K) = 0$. Met behulp van hierdie vergelyking word die waarde van r vasgestel. Die stappe benodig om die waarde van r te bepaal kan as volg saamgevat word:

- Bereken $S_n(r, K)$ volgens bogenoemde prosedure naamlik

$$S_0(r, K) = A_0$$

$$\begin{aligned} S_1(r, K) &= S_0(1 + r) + A_1 \text{ as } S_0 < 0 \text{ (verdiskonteer teen } r) \\ &= S_0(1 + K) + A_1 \text{ as } S_0 > 0 \text{ (verdiskonteer teen } K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(r, K) &= S_1(1 + r) + A_2 \text{ as } S_1 < 0 \\ &= S_1(1 + K) + A_2 \text{ as } S_1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(r, K) &= S_{n-1}(1 + r) + A_n \text{ as } S_{n-1} < 0 \\ &= S_{n-1}(1 + K) + A_n \text{ as } S_{n-1} > 0 \end{aligned}$$

- Bepaal die waarde van r wat $S_n(r, K) = 0$ stel.

'n Iteratiewe soekproses word gebruik om r te bepaal. Met behulp van die rekenaar word verskillende waardes van r geselekteer en daardie waarde van r wat vir 'n gegewe K $S_n(r, K) = 0$ stel, is dan die 'interne rendement' van die projek.

Die volgende voorbeeld ('n gemengde belegging) sal gebruik word om bogenoemde metode te illustreer:

Jaar	0	1	2
Kontantvloei	-1 600	10 000	-10 000

In dié voorbeeld is die koste van kapitaal K 10%. Die eerste stap in die berekening van r is om 'n waarde van r te selekteer en dan die balanse van die projek volgens bogenoemde reëls te bereken. 'n Waarde gelykstaande aan nul word as 'n eerste waarde vir r geselekteer. Die balanse van die projek is:

$$S_0(r, K) = -1 600$$

$$\begin{aligned} S_1(r, K) &= -1 600(1 + r) + 10 000 \\ &= -1 600 - 1 600r + 10 000 \\ &= 8 400 \quad (r = 0) \end{aligned}$$

$$S_1(r, K) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \therefore S_2(r, K) &= 8 400(1 + K) - 10 000 \\ &= 9 240 - 10 000 \\ &= -760. \end{aligned}$$

Omdat $S_2(r, K)$ nie gelyk is aan nul nie en boonop ook negatief is, word die geselekteerde waarde van r verminder. Die keuse van die vermindering (willekeurig) is in die voorbeeld op 0,002 (0,2%) gestel. Die proses word nou herhaal totdat $S_2(r, K)$ gelyk is aan nul. In die besondere geval sal 'n waarde van $r = -0,432$ $S_2(r, K)$ gelyk aan nul stel. Die 'interne rendement' van die belegging is dus -43,2% en behoort die projek nie aanvaar te word nie.

Wanneer die tradisionele benadering gevolg word om die interne rendement r^* van die belegging te bepaal word daar gevind dat $r^* 25\%$ en 400% is. Die projek behoort dus aanvaar te word as die koste van kapitaal 10% is. Hierdie teenstrydigheid ontstaan as gevolg van die feit dat die tradisionele benadering aanvaar dat die interne rendement onafhanklik van die koste van kapitaal is.

'n Rekenaarprogram om die IRR van 'n belegging te bereken

In dié gedeelte word 'n rekenaarprogram beskrywe wat die IRR van 'n projek bereken. Die program is geskryf in Apple Basic en word in Bylae 1 getoon. Die stappe wat die program uitvoer kan as volg opgesom word:

- Voer die data in.
- Bepaal die aard van die belegging, dit wil sê konvensioneel of nie-konvensioneel
 - Indien konvensioneel bepaal die IRR met behulp van die Newton-Raphson iteratiewe proses. Die probleem is afgehandel en die program eindig dus hier.
 - Indien nie-konvensioneel vind r min en gaan na stap 3.
- Bepaal die waarde van $S_n(r \text{ min})$
 - Indien $S_n(r \text{ min}) > 0$ is die belegging 'n nie-konvensionele suiwer belegging en word die IRR met behulp van die Newton-Raphson metode bepaal.
 - Indien $S_n(r \text{ min}) < 0$ is die belegging 'n nie-konvensionele gemengde belegging en is die IRR afhanklik van die koste van kapitaal. Die IRR word bereken vir 'n gegewe waarde van K . Die waarde van r wat $S_n(r, K) = 0$, stel is die 'interne rendement' van die projek.

Voorbeelde

Die gebruik van die rekenaarprogram sal aan die hand van enkele voorbeelde geïllustreer word:

Eerste voorbeeld

Einde van Jaar	Kontantvloei
0	- 1 000
1	500
2	400
3	300
4	100

Dit is 'n konvensionele belegging en die IRR = $14,4\%$

Tweede voorbeeld

Einde van Jaar	Kontantvloei
0	- 1 600
1	10 000
2	- 10 000

Hierdie is die bekende voorbeeld van Lorie en Savage.⁶ As die tradisionele benadering gevolg word om die IRR te bereken word twee opbrengskoerse verkry naamlik 25% en 400% .

Dit is egter 'n nie-konvensionele gemengde belegging aangesien $S_2(r \text{ min})$ negatief is (Die waarde van $r \text{ min}$ is 525%). Wanneer die koste van kapitaal 25% is, is die IRR

ook 25% . Met behulp van die rekenaar kan vir elke gegewe waarde van K 'n IRR bereken word:

K	IRR
10%	- 43,2%
20	4,1
25	25,0
30	44,2
50	108,3
100	212,5
400	400
500	420,8

Wanneer die koste van kapitaal K tussen 25% en 400% is, is die IRR groter as K en kan die projek aanvaar word. Wanneer K kleiner as 25% of groter as 400% is, is die IRR kleiner as K en moet die projek verwerp word.

Samevatting

Wanneer die IRR in kapitaalbegroting gebruik word, word daar soms meer as een opbrengskoers vir 'n gegewe projek verkry. Hierdie probleem ontstaan as gevolg van die foutiewe aanname wat gemaak word naamlik dat die IRR van 'n projek onafhanklik is van die koste van kapitaal.

Ten einde die probleem te oorbrug is beleggings na aanleiding van Mao geklassifiseer as suiwer of gemeng. Slegs in die geval van suiwer beleggings is die betrokke aanname geldig en kan die IRR soos gewoonlik bereken word. Vir gemengde beleggings is die IRR afhanklik van die koste van kapitaal en moet 'n ander benadering gevolg word om die IRR te bereken. Die metode wat gevolg moet word is in die artikel bespreek en is 'n rekenaarprogram in Apple Basic geskrywe wat die metode implementeer.

Summary

It is often stated that one of the problems that can occur when using the internal rate of return in capital budgeting is that the method can generate multiple rates or solutions. In this article the problem of multiple rates is analysed, using the approach adopted by J.C.T. Mao in his book *Quantitative Analysis of Financial Decisions*. Investments are classified as either simple or nonsimple. A simple investment is one whose net cash flow takes the pattern of an initial outlay followed by cash receipts alone. A nonsimple investment on the other hand, is one whose net cash outflows are not restricted to the initial period, but are interposed with net cash inflows throughout the life of the project. Investments are also classified as being either pure or mixed. An investment is pure if the firm does not overdraw on its return at any point in time and hence is not indebted to the project. A mixed investment on the other hand is any investment that is not pure. The article indicates that all simple investments are pure and that nonsimple investments may be either mixed or pure. All pure investments (simple or nonsimple) have only one internal rate of return and the return is independent of the cost of capital. Nonsimple mixed investments can generate multiple rates of return and the article discusses how this problem can be solved.

In order to implement the proposed solution a computer program was written in Apple Basic. The use of the program is illustrated with a few examples.

Verwysings

1. Weston, J.F. & Brigham, E.F. 1978. *Managerial Finance*. Hinsdale, Illinois: The Dryden Press.
2. Brealey, R. & Myers, S. 1981. *Principles of Corporate Finance*. Johannesburg: McGraw-Hill Book.
3. Jones, B.W. Company, 1982. *Inflation in Engineering*. Economic Analysis, 1982. New York: John Wiley & Sons.
4. Mao, J.C.T. 1969. *Quantitative Analysis of Financial Decisions*. London: Collier-MacMillan Ltd.
5. Hildebrand, F.B. *Introduction to Numerical Analysis*, 1956. New York: McGraw-Hill.
6. Lorie, J.H. & Savage, L.J. *Three Problems in Rationing Capital*. *J. Bus.* 28 (Oct. 1955).

Bylae 1

Basic-Program — Interne Rendement

```

10 REM DIE PROGRAM VIND DIE INTERNE RENDEMENT VAN ENIGE BELEGGING
20 COSUB 100: REM BRUK DIE OPSKRIF
25 COSUB 300: REM LEES DIE DATA
35 COSUB 500: REM BEPAAL DIE TIFE BELEGGING
40 ON (D1) GOTO 45,60
42 REM KONVENSIENELE BELEGGING
45 COSUB 400
50 COSUB 1000: REM WERKEN DIE WAARDE VAN R
58 GOTO 99
60 COSUB 2000: REM VIND RMIN
70 ON (O1) GOTO 75,50
72 REM VIND DIE WAARDE VAN R VIR 'N GEGEVE KOSTE VAN KAPITAAL
75 COSUB 3000
99 END
100 REM VERTEL GEBRUIKER WAT DIE PROGRAM DOEN
110 MORE
115 VTAB 2: PRINT "PROGRAM DETERMINES THE IRR OF A PROJECT"
120 VTAB 10: PRINT "IT USES THE METHOD OUTLINED BY MAO IN"
125 VTAB 12: PRINT "QUANTITATIVE ANALYSIS OF FINANCIAL"
130 VTAB 14: PRINT "DECISIONS COLLIER-MACMILLAN"
135 VTAB 16: PRINT "LONDON 1969"
140 VTAB 23: PRINT "PUSH RETURN TO CONTINUE"
145 GET A$: IF A$ = CHR$(13) THEN 145
199 MORE: RETURN
300 REM DIE SUBROUTINE LEES DIE DATA
305 REM FLO(1): BEVAT DIE KONTANTSTROME
308 REM FLO(0): KONVENSIENELE BELEGGING
309 REM T1: AANTAL JARE. MAG NIE 50 OORSKRY NIE
310 DIM FLO(50)
320 INPUT "ENTER NO. OF YEARS (T1):" T1: PRINT
321 IF T1 < 0 GOTO 325
322 PRINT "NO. OF YEARS MUST EXCEED ZERO TRY AGAIN"
323 GOTO 320
325 FOR I = 0 TO T1
330 PRINT "ENTER CASH FLOW FOR YEAR "I":
335 INPUT FLO(I)
336 IF FLO(0) < 0 GOTO 340
337 PRINT "INITIAL CASH FLOW MUST BE NEGATIVE"
338 PRINT "TRY AGAIN"
339 GOTO 330
340 NEXT I
398 MORE
399 RETURN
500 REM KONTROLEER OF DIE BELEGGING KONVENSIENELE OF NIE-KONV. IS
510 FOR I = 1 TO T1
515 IF FLO(I) > 0 GOTO 530
520 O1 = 2
525 GOTO 599
530 O1 = 1
535 NEXT I
599 RETURN
600 REM ROUTINE BEPAAL DIE EERSTE WAARDE VAN DIE IRR
610 PRINT "THIS PROGRAM USES AN ITERATIVE PROCESS": PRINT
615 PRINT "TO FIND THE IRR. AS A FIRST GUESS IT SETS": PRINT
620 PRINT "THE IRR = 30%. DO YOU BELIEVE YOU CAN": PRINT
625 PRINT "IMPROVE ON THIS. IF SO SPECIFY YOUR OWN": PRINT
630 PRINT "FIRST ESTIMATE": PRINT
635 PRINT "DO YOU WANT TO SPECIFY YOUR OWN FIRST": PRINT
640 PRINT "ESTIMATE OF THE IRR?": PRINT
645 INPUT "TYPE Y IF YES TYPE N IF NO (154):" Y$: PRINT
650 IF Y$ = "Y" GOTO 670
655 R = 0.3
660 GOTO 680
670 INPUT "ENTER YOUR ESTIMATE OF THE REAL IRR (AS A %) (154):" R: PRINT
675 R = R / 100
680 FLASH: PRINT "PUSH RETURN TO CONTINUE"
685 GET A$: IF A$ = CHR$(13) GOTO 685
687 NORMAL
690 MORE
699 RETURN

```

Bylae 1 — Vervolg

```

1000 REM BEPAAL R VIR 'N SLIMMER BELEGGING
1005 REM VERVOLG KONTROL-PROGRAM: WETTER
1006 VTAB 13: FLASH: PRINT "PUSH RETURN TO FIND THE IRR"
1010 I = 1: T2 = 2: J = 1: T1 = 1: T2 = 1: T1 = 1: T2 = 1
1025 SH = FLO(0)
1030 FOR I = 1 TO T1
1035 SH = SH + (1 + R) * FLO(I)
1040 SH = SH * (1 + R)
1045 SH = SH * (1 + R)
1050 NEXT I
1055 IF ABS(SH) < 1E-10 GOTO 1070
1060 R = (R + 1) / 2
1065 GOTO 1025
1070 R = INT(R * 1000) / 10
1075 MORE
1080 PRINT "THE IRR FOUND AFTER "J" ITERATIONS IS: PRINT: PRINT
1085 PRINT "YEAR CASH FLOW"
1090 PRINT "-----"
1095 FOR I = 0 TO T1
1100 PRINT I, FLO(I)
1105 NEXT I
1110 PRINT "THE IRR = "R/100: PRINT
1999 RETURN
2000 REM BEPAAL RMIN
2010 INC = 0.1
2015 R = 0
2020 SH = FLO(0)
2025 FOR I = 1 TO T1
2030 SH = SH + (1 + R) * FLO(I)
2035 IF SH < 0 GOTO 2055
2040 NEXT I
2045 IF R = 0 GOTO 2095
2050 RL = R - INC
2052 GOTO 2045
2055 R = R + INC
2060 GOTO 2020
2065 SH = FLO(0)
2070 FOR I = 1 TO T1
2075 SH = SH + (1 + RL) * FLO(I)
2080 IF SH < 0 GOTO 2090
2085 NEXT I
2090 GOTO 2092
2095 RL = R - INC
2099 NEXT R
2100 R = RL
2105 PRINT "THE VALUE OF RMIN = "R
2110 SH = SH + (1 + R) * FLO(1)
2115 IF SH < 0 GOTO 2115
2120 O1 = 1
2125 GOTO 2999
2130 O1 = 2
2135 RETURN
3000 REM DIE ROUTINE VIND DIE IRR WANNER DIE SPESIESE AFHANKELIK IS VAN DIE RI-
3010 REM DIE KOSTE VAN KAPITAAL. HET DEUR DIE GEBRUIKER AANGEKONDE WERD
3020 PRINT "WHAT IS YOUR COST OF CAPITAL?"
3031 INPUT "ENTER AS A % (154):" R: PRINT
3032 R = R / 100
3035 R = 0.1
3040 INC = 0.01
3045 SH = FLO(0)
3050 FOR I = 1 TO T1
3055 IF SH < 0 GOTO 3070
3060 SH = SH + (1 + R) * FLO(I)
3065 GOTO 3075
3070 SH = SH * (1 + R) * FLO(I)
3075 NEXT I
3080 IF ABS(SH) < 1E-10 GOTO 3100
3085 IF SH < 0 AND R = 0 GOTO 3120
3090 IF SH < 0 AND R = 0 GOTO 3120
3095 IF SH < 0 AND R = 0 GOTO 3120
3099 IF SH < 0 AND R = 0 GOTO 3120
3100 R = R + INC
3105 INC = INC / 2
3110 R = R - INC
3115 L = 1
3120 GOTO 3045
3125 R = R + INC
3130 L = 0
3135 GOTO 3045
3140 R = R - INC
3145 L = 1
3150 GOTO 3045
3155 R = R + INC
3160 INC = INC / 2
3165 R = R + INC
3170 L = 0
3175 GOTO 3045
3180 MORE
3185 R = INT(R * 1000) / 10
3190 R = INT(R * 1000) / 10
3195 PRINT "YEAR CASH FLOW"
3200 PRINT "-----"
3205 FOR I = 0 TO T1
3210 PRINT I, FLO(I)
3215 NEXT I
3220 PRINT "THE IRR = "R/100: PRINT
3225 PRINT "THE COST OF CAPITAL = "R/100: PRINT
3999 RETURN

```